



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO



FACULTAD DE INGENIERÍA

Apuntes de la Unidad de Aprendizaje de Sistemas Lineales y Señales Clave L41136

Para la licenciatura de

Ingeniería en Electrónica

Del semestre

Quinto

Elaborado por

Dr. Eduardo Rodríguez Ángeles

Toluca, Edo. de México, Julio del 2017

Índice

Presentación	2
1 Análisis de señales continuas	3
1.1 Señales	3
1.2 Representación de señales complejas	5
1.3 Paridad de señales	7
1.4 Periodicidad de señales	8
1.5 Energía y potencia de señales	10
1.6 Análisis espectral de señales senoidales mediante Representación Fasorial Rotatoria (RFR)	11
1.7 Funciones singulares	14
1.8 Operaciones sobre la variable tiempo de las señales	19
1.9 Convolución de señales	22
2 Análisis de sistemas continuos Lineales Invariantes en el Tiempo (LIVT) mediante Integral de Convolución (IC)	23
2.1 Sistemas	23
2.2 Modelado matemático de sistemas físicos	26
2.3 Función de Respuesta al Impulso (FRI) de sistemas LIVT	28
2.4 Respuesta de sistemas LIVT mediante Integral de Convolución	29
2.5 Estabilidad Entrada Acotada-Salida Acotada (BIBO) de sistemas LIVT	31
2.6 Función de Respuesta a la Frecuencia (FRF) de sistemas LIVT BIBO estables	32
2.7 Respuesta de sistemas LIVT BIBO estables a entradas senoidales	33
3 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Series de Fourier (SF)	34
3.1 Series de Fourier	34
3.2 Análisis espectral de señales periódicas mediante Series de Fourier	37
3.3 Respuesta de sistemas LIVT BIBO estables a entradas periódicas	37
3.4 Análisis espectral de la respuesta de sistemas LIVT BIBO estables a entradas periódicas	39
3.5 Distorsión armónica en sistemas LIVT.	40
4 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Transformada de Fourier (TF)	41
4.1 Transformada de Fourier	41
4.2 Transformada de Fourier Generalizada	43
4.3 Análisis espectral de señales mediante Transformada de Fourier	44
4.4 Respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Fourier	46
4.5 Análisis espectral de la respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Fourier	47
5 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Transformada de Laplace (TL)	50
5.1 Transformada de Laplace	50
5.2 Función de Transferencia (FT) de sistemas LIVT	52
5.3 Respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Laplace	53
5.4 Estabilidad absoluta de sistemas LIVT	54
Referencias	56

Presentación

El presente material responde a la necesidad de que los alumnos dispongan de apuntes de la unidad de aprendizaje de Sistemas Lineales y Señales. Esta asignatura es bastante amplia y normalmente se termina con el tiempo justo al final del semestre, dejando muchas veces el deseo de haber realizado más ejemplos y ejercicios.

Esta asignatura se ubica en el quinto periodo del mapa curricular de la carrera de Ingeniería en Electrónica, no tiene seriación previa, pero si tiene seriación subsecuente con la unidad de aprendizaje de Control I. A pesar de que no tiene seriación previa si es recomendable que el alumno ya haya aprobado los cursos correspondientes a la formación matemática: Álgebra Superior, Álgebra Lineal, Geometría Analítica, Cálculo 1, Cálculo 2, Cálculo 3, Cálculo Avanzado y Ecuaciones Diferenciales, para que se le facilite la apropiación de los conocimientos de la asignatura.

Este material comprende todos los temas del curso, proporcionando la teoría correspondiente a ellos y sugiriendo algunos ejemplos. Sin embargo, no se desarrollan dichos ejemplos debido a que se pretende que sean desarrollados paso a paso en clase, para de esa forma poder resolver dudas al respecto. Al final del material se incluye una serie de referencias que pueden ser consultadas para ampliar el conocimiento de los temas.

Se sugiere que estos apuntes se les vayan facilitando a los alumnos según los vayan requiriendo y de manera previa a la clase, es decir que dispongan del apunte del tema antes de verlo en clase, para que así los alumnos tengan la oportunidad de revisar y estudiar esa información. De esta manera, el día de la clase de ese tema se iniciaría con una discusión breve de la información y el resto del tiempo de clase se le dedicaría a la resolución de ejemplos y ejercicios. De esta forma se pretende obtener un mejor aprovechamiento del tiempo clase y mejorar el aprendizaje de los alumnos.

1 Análisis de señales continuas

1.1 Señales

Señal: es una variable o magnitud que contiene información acerca del comportamiento de un fenómeno físico. Ejemplos: voltaje y corriente en un circuito eléctrico, velocidad y desplazamiento de un cuerpo, temperatura y presión de un horno, etc.

Análisis: es identificar los componentes de un todo, separarlos y examinarlos para poder acceder a sus principios, características o propiedades más elementales.

Análisis de señales: consiste en determinar las características o propiedades de una señal, así como su valor.

Representación de una señal.

Para poder realizar el análisis de una señal es necesario contar con una representación de ella, es decir con la "imagen" o idea simbólica que sustituye o presenta a esa señal en la mente humana. Una señal se puede representar de las siguientes maneras:

1. **Representación matemática:** se utiliza una función matemática, en una o más variables independientes, para presentar la señal (variable dependiente de la función). Ejemplo: $v(t) = 12 \sin(10\pi t)$ (el voltaje v es función del tiempo t).
2. **Representación gráfica:** se utiliza una gráfica para presentar la señal. Ejemplo: la señal de voltaje anterior se puede representar gráficamente en un plano cartesiano donde el eje horizontal es el tiempo y el eje vertical es el valor de la señal de voltaje.

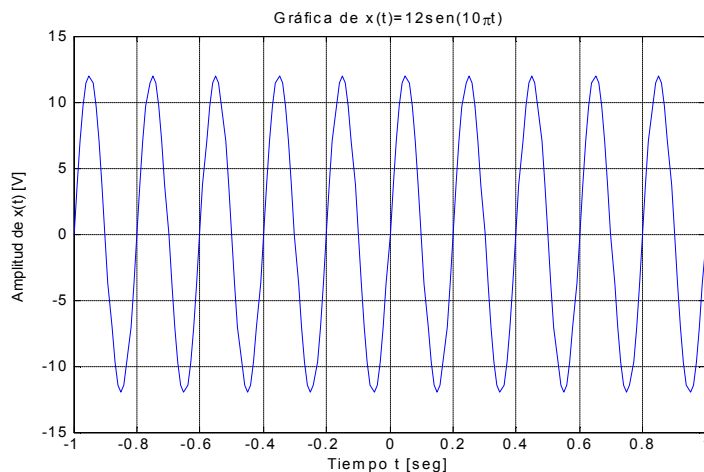


Fig.1: Representación gráfica de una señal.

Clasificación y propiedades de señales.

La clasificación de una señal se realiza de acuerdo a si cumple o no cierta característica o propiedad. Un listado de los diferentes tipos de señales, así como de la propiedad correspondiente, es el siguiente:

1. De acuerdo a su **Naturaleza física:** como su nombre lo indica, depende del tipo de fenómeno en el que se define la señal, por ejemplo:
 - **Señales eléctricas:** son las de fenómenos eléctricos. Ejemplos: voltaje, corriente, etc.
 - **Señales mecánicas:** son las de fenómenos mecánicos. Ejemplos: desplazamiento, velocidad, aceleración, etc.
 - **Señales térmicas:** son las de fenómenos térmicos. Ejemplos: temperatura, conductividad térmica, etc.
2. De acuerdo a su **Número de variables independientes:** como su nombre lo indica, depende de cuántas variables independientes tiene la señal:
 - **Señales de una sola variable independiente:** tienen una única variable independiente que normalmente es el tiempo. Este es el caso más común y más importante, por lo que de aquí en adelante las definiciones y el análisis se acotarán a este caso. Ejemplo: $i(t) = 10 \cos(2\pi t)$ (la corriente i es función de una sola variable: el tiempo t).

- *Señales de varias variables independientes*: tienen dos o más variables independientes. Ejemplos: temperatura ambiental, señal sísmica, etc.
- De acuerdo a la *Relación entre sus variables*: depende de cómo se está realizando la asignación de valores a la variable dependiente (valor de la señal) al darle valores a la variable independiente (tiempo).
 - *Señales determinísticas*: el valor de la variable dependiente en un instante de tiempo dado es asignado de forma única a partir del valor de la variable independiente. Ejemplo: $f(t) = 12e^{-0.5t}$ (en un instante de tiempo t_o la fuerza adquiere un único valor $f(t_o)$ obtenido de acuerdo a la función dada).
 - *Señales estocásticas, probabilísticas o aleatorias*: el valor de la variable dependiente en un instante de tiempo dado es asignado en forma arbitraria a partir del valor de la variable independiente. Ejemplos: señal sísmica, señal de un electrocardiograma, señal de un electroencefalograma, índice de la bolsa de valores, cualquier señal con ruido, etc.
 - De acuerdo a su *Continuidad en el tiempo*: depende de si la señal tiene un comportamiento continuo en el tiempo.
 - *Señales continuas (en el tiempo)*: el valor de la señal está definido (existe) para todo valor real de la variable independiente (tiempo). Ejemplo: $x(t) = 2\sin(\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (el desplazamiento x existe para todo valor real del tiempo t).
 - *Señales discretas (en el tiempo)*: el valor de la señal está definido (existe) sólo para ciertos valores reales de la variable independiente (tiempo). Ejemplo: $x(t) = 2\sin(\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ (el desplazamiento x sólo existe para todo valor entero del tiempo t).
 - De acuerdo a su *Valor*: depende de que tipo de valor adquiere la señal.
 - *Señales reales*: el valor de la señal es un número real para todo valor de la variable independiente (tiempo). Ejemplo: $f(t) = 5e^{-0.3t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (la fuerza f adquiere un valor real para todo valor de tiempo t).
 - *Señales imaginarias*: el valor de la señal es un número imaginario para todo valor de la variable independiente (tiempo). Ejemplo: $f(t) = j5e^{-0.3t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (la fuerza f adquiere un valor imaginario para todo valor de tiempo t).
 - *Señales complejas*: el valor de la señal en al menos un valor de la variable independiente (tiempo) es un número complejo. Ejemplo: $f(t) = 5e^{-j0.3t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (la fuerza f adquiere un valor complejo en al menos un valor de tiempo t).
 - De acuerdo a su *Paridad*: depende del tipo de simetría que presenta la gráfica de la señal. (Esta propiedad se analizará con detalle en el tema 1.3).
 - *Señales pares*: la gráfica de la señal tiene simetría par. Ejemplo: $y(t) = t^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - *Señales impares*: la gráfica de la señal tiene simetría impar. Ejemplo: $y(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - *Señales sin paridad*: la gráfica de la señal no tiene simetría alguna. Ejemplo: $y(t) = t^2 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - De acuerdo a su *Periodicidad*: depende de si la señal es cíclica o no en el tiempo. (Esta propiedad se analizará con detalle en el tema 1.4).
 - *Señales periódicas*: la señal si es cíclica. Ejemplo: $x(t) = 12\sin(\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - *Señales aperiódicas*: la señal no es cíclica. Ejemplo: $x(t) = 2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - De acuerdo a su *Energía y Potencia*: depende de los valores de energía y de potencia que tenga la señal. (Esta propiedad se analizará con detalle en el tema 1.5).
 - *Señales de energía*: la señal es toda de energía. Ejemplo: $y(t) = 2e^{-0.5t}$, $\forall t \geq 0$.
 - *Señales de potencia*: la señal es toda de potencia. Ejemplo: $y(t) = 2$, $\forall t \geq 0$.
 - *Señales ni de energía ni de potencia*: la señal no es ninguna de las anteriores. Ejemplo: $y(t) = 2e^{0.5t}$, $\forall t \geq 0$.

1.2 Representación de señales complejas

A manera de introducción, y debido a que ya es conocida y a que tiene similitudes con la representación de señales complejas, se presenta la:

Representación de señales reales.

Una señal real $x(t)$ es una función en dos variables, una dependiente x que toma valores reales, y otra independiente t que toma valores reales. Una señal real se puede representar de dos formas básicas:

1. *Representación cartesiana, rectangular o euclideana*: la ubicación de un punto específico de la señal $x(t)$ en el espacio se realiza a través del par coordenado (t_o, x_o) , donde $x_o = x(t_o)$, moviéndose t_o unidades horizontalmente y luego x_o unidades verticalmente. Esto es lo que define un plano real cartesiano: la variable independiente en el eje horizontal y la variable dependiente en el eje vertical.
2. *Representación polar*: la ubicación de un punto específico de la señal $r(\theta)$ en el espacio se realiza a través del par coordenado (θ_o, r_o) , donde $r_o = r(\theta_o)$, moviéndose θ_o grados a partir del eje horizontal y luego r_o unidades en esa dirección. Esto es lo que define un plano real polar: la variable independiente corresponde a las direcciones angulares a partir de un origen y la variable dependiente a las distancias al origen.

Es importante recordar que, de acuerdo a las definiciones de las representaciones cartesiana y polar, se puede establecer la siguiente relación geométrica entre ellas:

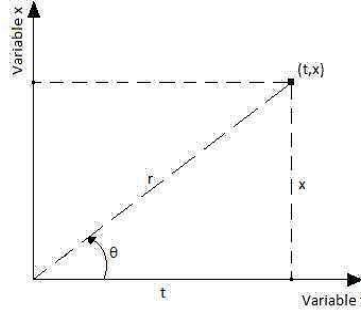


Fig.2: Relación geométrica entre las representaciones cartesiana y polar reales.

De la figura anterior se obtienen las fórmulas de transformación de polar a cartesiana: $\begin{cases} x = r \sin(\theta) \\ t = r \cos(\theta) \end{cases}$ y de cartesiana a polar: $\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{x}{t}\right) \\ r = \sqrt{t^2 + x^2} \end{cases}$.

Ejemplo: Obtener y graficar las representaciones cartesiana y polar de $x(t) = 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Representación de señales complejas.

Una señal compleja $x(t)$ es una función en dos variables, una dependiente x que toma valores complejos, y otra independiente t que toma valores reales. Una señal compleja se puede representar de dos formas básicas:

1. *Representación rectangular*: la señal compleja está dada por $x(t) = a(t) + jb(t)$, donde $a(t)$ es la parte real de la señal y $b(t)$ es la parte imaginaria de la misma. Nótese que ambas partes, real e imaginaria, son funciones o señales reales, por lo que una forma de graficar a la señal compleja $x(t)$ consiste en graficar sus dos partes, real e imaginaria, esto es dos gráficas en plano real cartesiano. Por otro lado, dado que las partes real e imaginaria son componentes de la señal $x(t)$, otra forma de graficarla consiste en graficar la parte real contra la parte imaginaria en un plano complejo cartesiano: el eje horizontal corresponde a la parte real y el eje vertical a la parte imaginaria. Obsérvese que en la primera forma de graficación se tiene el tiempo en forma explícita y los componentes real e imaginario en dos gráficas distintas, mientras que en la segunda forma se tiene el tiempo en forma implícita y los componentes real e imaginario en una sola gráfica.
2. *Representación polar*: la señal compleja está dada por $x(t) = |x(t)| \{\cos[\theta(t)] + j \sin[\theta(t)]\} = |x(t)| e^{j\theta(t)}$, donde $|x(t)|$ es la magnitud de la señal y $\theta(t)$ es la fase de la misma. Nótese que ambos componentes, magnitud y fase, son funciones o señales reales, por lo que una forma de graficar a la señal compleja $x(t)$ consiste en graficar sus dos componentes, magnitud y fase, esto es dos gráficas en plano real cartesiano. Por otro lado,

dado que la magnitud y la fase son componentes de la señal $x(t)$, otra forma de graficarla consiste en graficar la magnitud contra la fase en un plano complejo polar: la fase indica la dirección angular y la magnitud la distancia al origen. Obsérvese que en la primera forma de graficación se tiene el tiempo en forma explícita y la magnitud y la fase están en dos gráficas distintas, mientras que en la segunda forma se tiene el tiempo en forma implícita y la magnitud y la fase están en una sola gráfica. Es importante mencionar que la fase $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$ rad y que la magnitud $|x(t)| > 0$.

De forma similar al caso de las señales reales, se puede establecer la siguiente relación geométrica entre las representaciones rectangular y polar complejas:

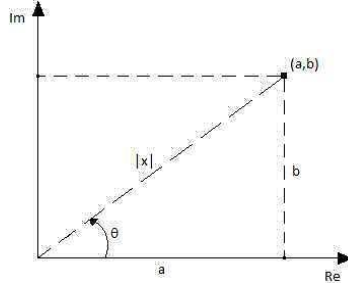


Fig.3: Relación geométrica entre las representaciones rectangular y polar complejas.

De la figura anterior se obtienen las fórmulas de transformación de polar a rectangular: $\begin{cases} a(t) = |x(t)| \cos[\theta(t)] \\ b(t) = |x(t)| \sin[\theta(t)] \end{cases}$

y de rectangular a polar: $\begin{cases} \angle x(t) = \theta(t) = \arctan \left[\frac{b(t)}{a(t)} \right] \\ |x(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \end{cases}$.

Dentro de las funciones complejas, existe la llamada función *complejo conjugado*: dada una función $x(t) = a(t) + jb(t) = |x(t)| e^{j\theta(t)}$, su función complejo conjugado se define como la función original con cambio de signo en la parte imaginaria, esto es el complejo conjugado de $x(t)$ es

$$x^*(t) = a(t) - jb(t) = |x(t)| e^{-j\theta(t)}$$

Observe que la función original y su complejo conjugado, en su forma rectangular, tienen la misma parte real, y que tienen el mismo valor absoluto de su parte imaginaria pero con signo contrario. Y en cuanto a su forma polar se observa que tienen la misma magnitud, y que tienen el mismo valor absoluto de su fase pero con signo contrario.

Operaciones aritméticas con funciones complejas.

Es conveniente recordar cómo se realizan las operaciones aritméticas con funciones complejas:

1. Igualdad: en su forma rectangular, dos funciones complejas son iguales si tanto sus partes reales como sus partes imaginarias son iguales. Si están en forma polar, entonces son iguales si tanto sus magnitudes como sus fases son iguales.
2. Suma algebraica: en forma rectangular sean $x(t) = a(t) + jb(t)$ y $y(t) = c(t) + jd(t)$, entonces $x(t) + y(t) = [a(t) + c(t)] + j[b(t) + d(t)]$.
3. Multiplicación: en forma rectangular sean $x(t) = a(t) + jb(t)$ y $y(t) = c(t) + jd(t)$, entonces el producto es $x(t)y(t) = [a(t) + jb(t)][c(t) + jd(t)] = [a(t)c(t) - b(t)d(t)] + j[a(t)d(t) - c(t)b(t)]$. En forma polar $x(t) = |x(t)| e^{j\theta(t)}$ y $y(t) = |y(t)| e^{j\phi(t)}$, entonces el producto es $x(t)y(t) = [|x(t)| e^{j\theta(t)}][|y(t)| e^{j\phi(t)}] = [|x(t)||y(t)|] e^{j\theta(t)} e^{j\phi(t)} = |x(t)||y(t)| e^{j[\theta(t)+\phi(t)]}$.
4. División: en forma rectangular sean $x(t) = a(t) + jb(t)$ y $y(t) = c(t) + jd(t)$, entonces $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x(t)y^*(t)}{y(t)y^*(t)} = \frac{a(t)c(t) + b(t)d(t)}{c^2(t) + d^2(t)} + j \frac{b(t)c(t) - a(t)d(t)}{c^2(t) + d^2(t)}$. En forma polar $x(t) = |x(t)| e^{j\theta(t)}$ y $y(t) = |y(t)| e^{j\phi(t)}$, entonces $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{|x(t)| e^{j\theta(t)}}{|y(t)| e^{j\phi(t)}} = \frac{|x(t)|}{|y(t)|} \frac{e^{j\theta(t)}}{e^{j\phi(t)}} = \frac{|x(t)|}{|y(t)|} e^{j[\theta(t)-\phi(t)]}$.

Propiedades de las funciones complejas.

También es importante recordar algunas propiedades de las funciones complejas, como son:

1. Parte real: $\operatorname{Re}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)]$. Parte imaginaria: $\operatorname{Im}\{x(t)\} = \frac{1}{2j}[x(t) - x^*(t)]$.
2. Magnitud: $|x(t)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{x(t)\} + \operatorname{Im}^2\{x(t)\}}$. Fase: $\angle x(t) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{x(t)\}}{\operatorname{Re}\{x(t)\}}\right)$.
3. Producto de una función por su complejo conjugado: $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$.
4. Magnitud y fase de un producto de funciones: $|x(t)y(t)| = |x(t)||y(t)|$, $\angle x(t)y(t) = \angle x(t) + \angle y(t)$.
5. Magnitud y fase de un cociente de funciones: $\left|\frac{x(t)}{y(t)}\right| = \frac{|x(t)|}{|y(t)|}$, $\angle \frac{x(t)}{y(t)} = \angle x(t) - \angle y(t)$.
6. Complejo conjugado de un producto o de un cociente de funciones: $[x(t)y(t)]^* = x^*(t)y^*(t)$, $\left[\frac{x(t)}{y(t)}\right]^* = \frac{x^*(t)}{y^*(t)}$.

Ejemplos: Obtener y graficar las representaciones rectangular y polar de las siguientes señales:

- a) $x(t) = 4t + j2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- b) $x(t) = 4t - j2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $x(t) = -4t + j2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- d) $x(t) = -4t - j2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- e) $x(t) = 4 + j2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- f) $x(t) = 4 - j2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- g) $x(t) = -4 + j2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- h) $x(t) = -4 - j2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- i) $x(t) = \frac{j3t}{4 + j2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dentro del conjunto de las funciones complejas se encuentra una función muy importante y muy usada en el análisis de señales. Esta es la *función exponencial compleja* $e^{j\theta t}$ que está asociada con las llamadas *identidades de Euler*, que son las siguientes:

$$\begin{aligned}e^{j\theta t} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) \\e^{-j\theta t} &= \cos(\theta) - j \sin(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{2}[e^{j\theta t} + e^{-j\theta t}] \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2j}[e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}]\end{aligned}$$

1.3 Paridad de señales

Paridad de una señal: describe la simetría gráfica que tiene la señal. De acuerdo a esta propiedad, las señales pueden ser:

- *Señales pares:* una señal $x(t)$ es par cuando se cumple la condición de paridad $x(-t) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Gráficamente una señal par tiene simetría par: el lado izquierdo de la gráfica a partir del eje vertical (eje de simetría) es el reflejo vertical del lado derecho. Ejemplos: polinomios pares, $\cos(t)$.
- *Señales impares:* una señal $x(t)$ es impar cuando se cumple la condición de imparidad $x(-t) = -x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Gráficamente una señal impar tiene simetría impar: el lado izquierdo de la gráfica a partir del eje vertical es el doble reflejo del lado derecho, primero reflejando verticalmente y luego horizontalmente, es decir el origen es el punto de simetría. Ejemplos: polinomios impares, $\sin(t)$.
- *Señales sin paridad:* una señal $x(t)$ es sin paridad cuando no se cumplen ninguna de las condiciones anteriores: ni la de paridad ni la de imparidad. Gráficamente una señal sin paridad no tiene simetría alguna. Ejemplos: polinomios generales, e^t .

Ejemplos:

- a) $x(t) = \tan(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- b) $x(t) = t^3 + 2t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $x(t) = a(t) + jb(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- d) $x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -5 \\ 4t & , -5 \leq t \leq -2 \\ 2 & , -2 < t \leq 2 \\ 4t & , 2 < t \leq 5 \\ 0 & , t > 5 \end{cases}$.

Nótese que el ejemplo c) anterior corresponde a una señal compleja, por lo que la propiedad de paridad no es exclusiva de las señales reales. Además, del ejemplo c) se concluye que una señal compleja $x(t)$ es par si y sólo si su parte real y su parte imaginaria son ambas pares; es impar si y sólo si su parte real y su parte imaginaria son ambas impares. Por otra parte, dentro de las señales complejas se dice que una señal $x(t)$ compleja es *simétrica conjugada* si cumple con la condición $x^*(t) = x(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es decir si su parte real es par y su parte imaginaria es impar; por lo que es sin paridad en cualquier otro caso.

Ejemplos:

- a) $x(t) = \sin(t) + jt$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- b) $x(t) = Ae^{j(\omega t + \theta)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $x(t) = 2t^2 + j \cos(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- d) $x(t) = 3\sin(t) + 5j$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Descomposición de una señal en su parte par y su parte impar.

Toda señal $x(t)$ se puede escribir como la suma de una señal par y de una señal impar, esto es: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, donde $x_e(t)$ es llamada *parte par de la señal $x(t)$* debido a que tiene paridad par, y $x_o(t)$ es llamada *parte impar de la señal $x(t)$* debido a que tiene paridad impar. Estas partes se pueden calcular con las siguientes fórmulas:

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \quad \text{y} \quad x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

Ejemplos:

- a) $x(t) = 2 + t + t^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- b) $x(t) = Ae^{-at}$, $A > 0$, $a < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -5 \\ 4t & , -5 \leq t \leq -2 \\ 2 & , -2 < t \leq 2 \\ 4t & , 2 < t \leq 5 \\ 0 & , t > 5 \end{cases}$.

1.4 Periodicidad de señales

Periodicidad de una señal: describe la ciclicidad que tiene la señal, esto es si una "parte básica de la señal" se repite consecutivamente a lo largo del tiempo. Esta parte que se repite se llama ciclo de onda de la señal. De acuerdo a esta propiedad las señales pueden ser:

- *Señales periódicas:* una señal $x(t)$ es periódica si $\exists T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, esto es si se cumple la condición de periodicidad.
- *Señales aperiódicas o no periódicas:* una señal $x(t)$ es aperiódica si no se cumple la condición de periodicidad, esto es si $\nexists T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Para toda señal periódica $x(t)$ se define:

- *Ciclo de onda de la señal:* es la parte fundamental o más pequeña de la señal que se repite a lo largo del tiempo.
- *Periodo de la señal:* es cualquier valor $T > 0$ que satisface la condición de periodicidad, y se mide en segundos.
- *Periodo fundamental de la señal, T_o o T_f :* es el valor más pequeño de T que satisface la condición de periodicidad, esto es el tiempo que dura un ciclo de onda, y se mide en segundos.

- *Frecuencia fundamental de la señal*, f_o o f_f : es el número de ciclos de onda que se repiten en una unidad de tiempo, se mide en hertz y se puede obtener usando la fórmula $f_o = \frac{1}{T_o}$. La frecuencia fundamental también se puede expresar en rad/seg usando la fórmula $\omega_o = \omega_f = 2\pi f_o$.

En la siguiente gráfica se muestran los conceptos anteriores:

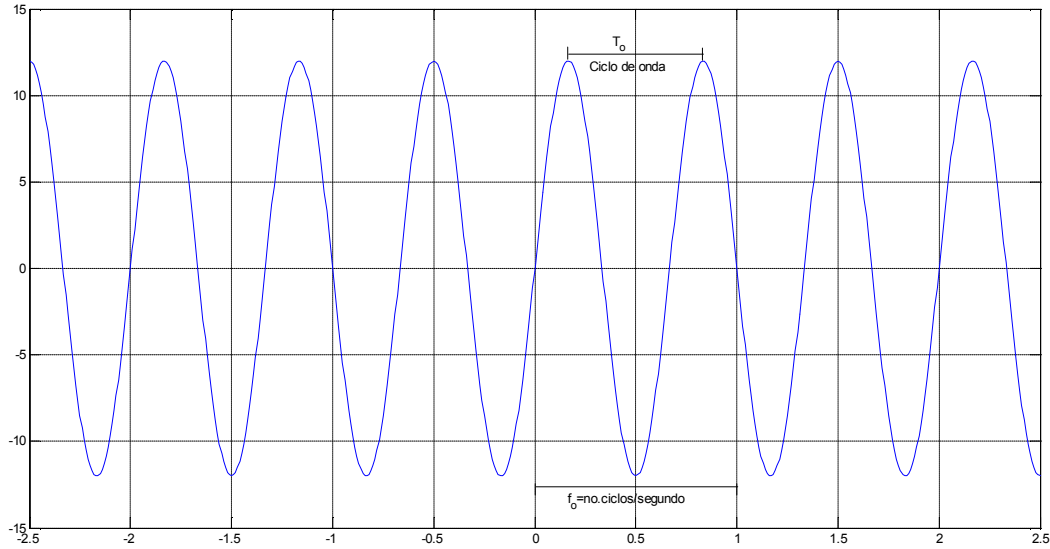


Fig.4: Periodicidad de una señal.

Ejemplos:

- $x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = A e^{-at}$, $A > 0$, $a < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = A \sin^2(\omega t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = a(t) + jb(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Del ejemplo a) anterior se concluye que:

Señal senoidal: es una señal periódica real que gráficamente tiene la forma de una función seno, y matemáticamente se define $x(t) = A \sin(\omega_o t + \theta)$ o $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, donde A es la amplitud de la señal, ω_o es la frecuencia fundamental de la señal en rad/seg, y θ es el defasamiento de la señal en rad.

Señal compuesta por la suma de senoidales: es una señal real que se define como $x(t) = \sum_i A_i \text{func}(\omega_i t + \theta_i)$

donde *func* es una función seno o coseno y A_i , ω_i y θ_i son la amplitud, frecuencia fundamental y defasamiento de la i -ésima señal senoidal.

Del ejemplo d) anterior se concluye que una señal suma de senoidales es periódica si y sólo si todas las relaciones entre todos y cada uno de los pares de periodos fundamentales individuales son números racionales y, si este es el caso, su periodo fundamental es múltiplo entero de cada uno de los periodos fundamentales individuales y todos estos múltiplos son coprimos entre sí. Esto se puede expresar como:

$$\text{Si } \frac{T_i}{T_j} \in \mathbb{Q}, \forall i \neq j \Rightarrow x(t) \text{ es periódica y } T_o = n_i T_i \text{ para } n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } \{n_i\} \text{ son coprimos}$$

Nótese que el ejemplo e) anterior corresponde a una señal compleja, por lo que la propiedad de periodicidad no es exclusiva de las señales reales. Además, del ejemplo e) se concluye que una señal compleja $x(t)$ es periódica si y sólo si su parte real y su parte imaginaria son ambas periódicas y la relación del periodo fundamental de la parte real entre el periodo fundamental de la parte imaginaria es un número racional, y su periodo fundamental es múltiplo entero de estos periodos fundamentales individuales y estos múltiplos son coprimos.

Ejemplos:

- a) $x(t) = 2 \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$
- b) $x(t) = 3 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{2\pi}{3}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$
- c) $x(t) = 0.5 \sin\left(2t - \frac{\pi}{5}\right) + 3 \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{5}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$
- d) $x(t) = Ae^{j(\omega t + \theta)}, \forall t \in \mathbb{R}.$
- e) $x(t) = 2 \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 3j \cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

Del ejemplo d) anterior se concluye que:

Señal exponencial compleja: es una señal periódica compleja que se define $x(t) = Ae^{j(\omega_o t + \theta)}$, donde $A > 0$ es la magnitud de la señal, ω_o es la frecuencia fundamental de la señal en rad/seg, y θ es la fase de la señal en rad.

1.5 Energía y potencia de señales

Primero es conveniente recordar lo que son la energía y la potencia desde el punto de vista de la física.

Energía: es la capacidad que tiene un fenómeno para realizar un trabajo.

Potencia: es el consumo de energía o trabajo por unidad de tiempo.

Dadas las definiciones anteriores, en el caso de las señales se tiene que:

Energía total de una señal $x(t)$: es la capacidad que tiene la señal para realizar un trabajo normalizada a una resistencia unitaria. La fórmula para obtener la energía total de una señal es:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad [J]$$

Potencia promedio de una señal $x(t)$: es el consumo de energía de la señal por unidad de tiempo normalizada a una resistencia unitaria. La fórmula para obtener la potencia promedio de una señal es:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad [W]$$

De acuerdo al contenido de energía y de potencia de las señales, éstas pueden ser:

- *Señales de energía:* una señal $x(t)$ es de energía cuando todo su contenido es de energía, esto es cuando se cumplen las siguientes condiciones para ser de energía:

$$0 < E_x < \infty \quad \text{y} \quad P_x = 0$$

- *Señales de potencia:* una señal $x(t)$ es de potencia cuando todo su contenido es de potencia, esto es cuando se cumplen las siguientes condiciones para ser de potencia:

$$E_x = \infty \quad \text{y} \quad 0 < P_x < \infty$$

- *Señales ni de energía ni de potencia:* una señal $x(t)$ no es de energía ni de potencia cuando no se cumplen ni las condiciones para ser de energía ni las condiciones para ser de potencia.

Ejemplos:

- a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-at}, & A > 0, a < 0, t \geq 0 \end{cases}$
- b) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-at}, & A > 0, a > 0, t \geq 0 \end{cases}$
- c) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-at}, & A > 0, a = 0, t \geq 0 \end{cases}$
- d) $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta), \forall t \in \mathbb{R}.$

- e) $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 f) $x(t + T_o) = x(t)$, $T_o > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 g) $x(t) = a(t) + jb(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Del ejemplo d) anterior se concluye que toda señal senoidal es señal de potencia con $P_x = \frac{A^2}{2}$ [W].

Del ejemplo e) anterior se concluye que toda señal suma de senoidales es señal de potencia con $P_x = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2}$ [W], es decir la potencia de la señal es la suma de las potencias individuales.

Del ejemplo f) anterior se concluye que toda señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental T_o es señal de potencia con $P_x = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |x(t)|^2 dt$ [W], donde \int_{T_o} indica que se toma un intervalo de integración de tamaño T_o . Esto es que la potencia de una señal periódica es igual a la potencia de un ciclo de onda de la señal.

Nótese que el ejemplo g) anterior corresponde a una señal compleja, por lo que el contenido de energía y de potencia no es exclusivo de las señales reales. Además, del ejemplo g) se concluye que la energía (o potencia) de una señal compleja $x(t)$ es la suma de la energía (o potencia) de la parte real y la de la parte imaginaria.

Ejemplos:

- a) $x(t) = A$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 b) $x(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ A \cos(\omega_o t + \theta) & , t \geq 0 \end{cases}$.
 c) $x(t) = 0.5 \sin\left(2t - \frac{\pi}{5}\right) + 3 \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{5}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 d) $x(t) = 3 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 e) $x(t) = 2 \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 3j \cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.6 Análisis espectral de señales senoidales mediante Representación Fasorial Rotatoria (RFR)

Análisis espectral de una señal.

Análisis espectral de una señal: consiste en determinar el comportamiento de una señal con respecto a la frecuencia, por lo que se debe tener una representación en el dominio de la frecuencia de la señal. El análisis espectral de una señal comprende la obtención de las siguientes características:

- *Magnitud de la señal:* corresponde al valor de magnitud que tiene la señal para diferentes valores de frecuencia.
- *Fase de la señal:* corresponde al valor de fase que tiene la señal para diferentes valores de frecuencia.
- *Frecuencia de la señal:* corresponde a los diferentes valores de frecuencia que toma la señal.
- *Espectro de magnitud de la señal:* es la gráfica de la magnitud de la señal con respecto a la frecuencia.
- *Espectro de fase de la señal:* es la gráfica de la fase de la señal con respecto a la frecuencia.
- *Función de densidad espectral de potencia (o energía) de la señal:* es una función en el dominio de la frecuencia que describe el comportamiento de la potencia (o energía) de una señal de potencia (o energía) con respecto a la frecuencia, es decir que indica la cantidad de potencia (o energía) que tiene la señal por unidad de frecuencia en cada valor de frecuencia en $-\infty < f < \infty$. Esta función tiene la característica de que al ser integrada en el rango completo de frecuencias se obtiene la potencia (o energía) de la señal.

$S_x(f)$ o $S_x(j\omega)$: función de densidad espectral de potencia en $\left[\frac{W}{Hz}\right]$ o en $\left[\frac{W}{rad/seg}\right]$, respectivamente, y

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega \quad [W].$$

$G_x(f)$ o $G_x(j\omega)$: función de densidad espectral de energía en $\left[\frac{J}{Hz}\right]$ o en $\left[\frac{J}{rad/seg}\right]$, respectivamente, y

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(j\omega) d\omega \quad [J].$$

- **Densidad espectral de potencia (o energía) de la señal:** es la gráfica de la función de densidad espectral de potencia (o energía) de la señal con respecto a la frecuencia.
- **Potencia promedio (o energía total) de la señal:** es la potencia promedio (o energía total) de una señal de potencia (o energía).
- **Potencia (o energía) de la señal en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$:** es la potencia (o energía) que una señal de potencia (o energía) tiene en el intervalo $[a, b]$ de frecuencia y se obtiene:

$$P_{[a,b]} = \int_a^b S_x(f) df = \int_a^b S_x(j\omega) d\omega \quad [W] \quad \left(\text{o bien } E_{[a,b]} = \int_a^b G_x(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_a^b G_x(j\omega) d\omega \quad [J] \right)$$

Cuando los espectros se grafican sólo para frecuencias $\omega \geq 0$ se les llama espectros de banda sencilla o unilaterales, y cuando se grafican para todo valor de frecuencia se les llama espectros de banda completa o bilaterales.

Representación Estándar Coseno y Representación Fasorial Rotatoria de una señal senoidal.

En este tema se considerará el análisis espectral de las señales suma de senoidales, debido a que son las señales más sencillas para obtener su análisis espectral. En temas más adelante se considerará el análisis espectral de otro tipo de señales no suma de senoidales.

Como ya se mencionó, se requiere de una representación frecuencial de la señal senoidal para poder realizar su análisis espectral. Esta representación frecuencial se llama *Representación Fasorial Rotatoria (RFR)*.

Para obtener la RFR de la señal suma de senoidales $x(t) = \sum_i A_i \text{func}(\omega_i t + \theta_i)$ donde *func* es una función seno o coseno, primero se debe obtener la *Forma Estándar Coseno (FEC)*. La FEC expresa a la señal suma de senoidales como la siguiente sumatoria de funciones coseno:

$x(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \theta_i)$ donde $A_i > 0$, $\omega_i > 0$ y $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ *rad* son la amplitud, frecuencia fundamental y defasamiento de la i -ésima señal senoidal.

Una vez obtenida la FEC, con ella se obtiene la *Representación Fasorial Rotatoria (RFR)* de la señal suma de senoidales, que consiste en una sumatoria de funciones exponenciales complejas de la siguiente forma:

$x(t) = \sum_i \{M_i e^{j[\omega_i t + \theta_i]} + M_i e^{-j[\omega_i t + \theta_i]}\}$ donde $M_i > 0$, $\omega_i > 0$ y $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ *rad* son la magnitud, frecuencia fundamental y defasamiento de la i -ésima señal senoidal.

Para poder obtener la FEC se hace uso de las identidades trigonométricas, y para poder obtener la RFR se usan las identidades de Euler.

Para entender la RFR primero se va a explicar lo que es un fasor rotatorio.

Fasor rotatorio: es una cantidad o función exponencial compleja que se utiliza para representar señales senoidales reales que tiene, gráficamente, la característica principal de ser un vector capaz de girar.

Sea el fasor rotatorio $M e^{j[\omega t + \theta]}$, entonces gráficamente corresponde a un vector de "tamaño" M , que en $t = 0$ se ubica en un ángulo θ , y que conforme aumenta t , va aumentando su ángulo de ubicación a un valor $\omega t + \theta$, esto es el vector comienza a "girar" a una velocidad ω en el sentido contrario de las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra este fasor:

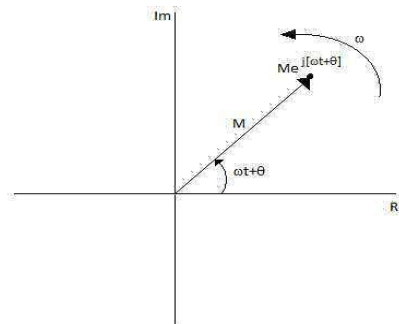


Fig.5: Fasor rotatorio.

Ahora considere el fasor rotatorio $Me^{-j[\omega t + \theta]}$. Este fasor resulta ser el complejo conjugado del fasor anterior, y gráficamente es un vector de "tamaño" M , que en $t = 0$ se ubica en un ángulo $-\theta$, y que conforme aumenta t , va disminuyendo su ángulo de ubicación a un valor $-\omega t - \theta$, esto es el vector comienza a "girar" a una velocidad ω en sentido de las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra este fasor:

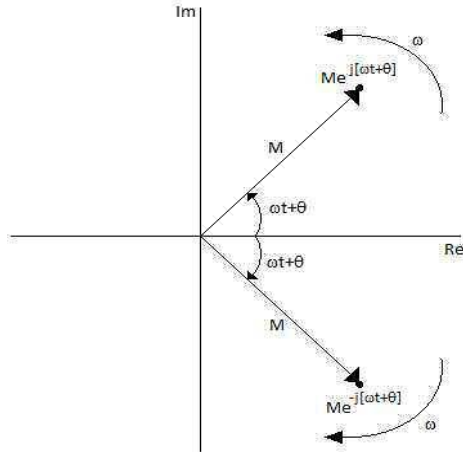


Fig.6: Fasores rotatorios complejos conjugados.

Una vez entendido lo que es un fasor rotatorio, obsérvese que en la RFR se tiene un par de fasores rotatorios complejos conjugados para cada señal senoidal. Esto significa que para una frecuencia específica y para un tiempo fijo, las partes imaginarias de estos fasores complejos conjugados se cancelan entre sí, quedando únicamente las partes reales, esto implica que la señal $x(t)$ sigue siendo señal real.

Para poder realizar el análisis espectral de una suma de senoidales solo falta introducir lo que es la *función impulso unitario*, $\delta(t)$: es una función que únicamente tiene el valor 1 en $t = 0$, y para cualquier otro valor de t toma el valor 0. Esta función tiene la característica de que al ser integrada en todo el rango de tiempo, o en un intervalo de tiempo que contenga a la función impulso unitario, el resultado es 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ 1 & , t = 0 \end{cases} \quad \left(\text{o bien } \delta(t - t_o) = \begin{cases} 1 & , t = t_o \\ 0 & , t \neq t_o \end{cases} , t_o \in \mathbb{R} \right) \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\left(\text{o bien } \int_a^b \delta(t - t_o) dt = 1 , t_o \in \mathbb{R} , a \leq t_o \leq b \right)$$

A continuación se muestra la gráfica de un impulso unitario:

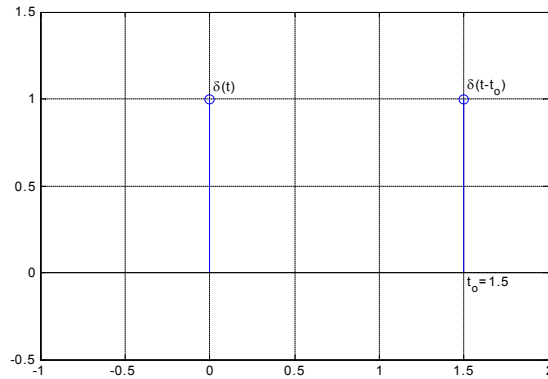


Fig.7: Función impulso unitario.

Procedimiento para obtener el análisis espectral de una señal suma de senoidales.

Primero hay que obtener la RFR de la señal suma de senoidales de interés, y una vez que se tenga se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la señal*: es el conjunto de las magnitudes de los fasores de la RFR de la señal. Esto es el conjunto $\{M_i\}$ que se puede expresar como $M_x = \sum_i \{M_i \delta(\omega - \omega_i) + M_i \delta(\omega + \omega_i)\}$.
2. *Fase de la señal*: es el conjunto de las fases de los fasores de la RFR de la señal. Esto es el conjunto $\{\theta_i\}$ que se puede expresar como $\theta_x = \sum_i \{\theta_i \delta(\omega - \omega_i) - \theta_i \delta(\omega + \omega_i)\}$.
3. *Frecuencia de la señal*: es el conjunto de las frecuencias de los fasores de la RFR de la señal. Esto es el conjunto $\{\omega_i\}$.
4. *Espectro de magnitud de la señal*: es la gráfica del conjunto de magnitudes de la señal $\{M_i\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{\omega_i\}$.
5. *Espectro de fase de la señal*: es la gráfica del conjunto de fases de la señal $\{\theta_i\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{\omega_i\}$.
6. *Función de densidad espectral de potencia de la señal*: es la función de magnitud de la señal M_x con las magnitudes M_i al cuadrado. Esto es $S_x(j\omega) = \sum_i \{M_i^2 \delta(\omega - \omega_i) + M_i^2 \delta(\omega + \omega_i)\}$.
7. *Densidad espectral de potencia de la señal*: es la gráfica del conjunto del cuadrado de las magnitudes de la señal $\{M_i^2\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{\omega_i\}$.
8. *Potencia promedio de la señal*: se puede obtener con la fórmula $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega = \sum_i M_i^2 [W]$.
9. *Potencia de la señal en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$* : se puede obtener con la fórmula $P_{[a,b]} = \int_a^b S_x(j\omega) d\omega [W]$.

Nótese que como una señal suma de senoidales es una señal de potencia, sólo se obtienen parámetros de potencia no de energía. También obsérvese que los espectros de magnitud y de fase y la densidad espectral de potencia son gráficas discretas, ya que el conjunto de frecuencias de los fasores es un conjunto discreto de valores. Además, se puede observar que, debido a que los fasores se presentan en pares complejos conjugados, entonces el espectro de magnitud y la densidad espectral de potencia son gráficas con simetría par y el espectro de fase es una gráfica con simetría impar.

Ejemplos:

- a) $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- b) $x(t) = \sin^2\left(7\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $x(t) = 3 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^3\left(5t - \frac{6\pi}{7}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.7 Funciones singulares

Funciones singulares: son funciones que tienen algún tipo de discontinuidad en algún o algunos valores de su variable independiente. Hay tres funciones singulares principales: impulso unitario, escalón unitario y rampa unitaria.

Función impulso unitario.

Función impulso unitario o delta de Dirac, $\delta(t)$: en términos prácticos es una función que únicamente tiene el valor 1 en $t = 0$, y para cualquier otro valor de t toma el valor 0. Esta función tiene la característica de que al ser integrada en todo el rango de tiempo, o en un intervalo de tiempo que contenga a la función impulso unitario, el resultado es 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de un impulso unitario:

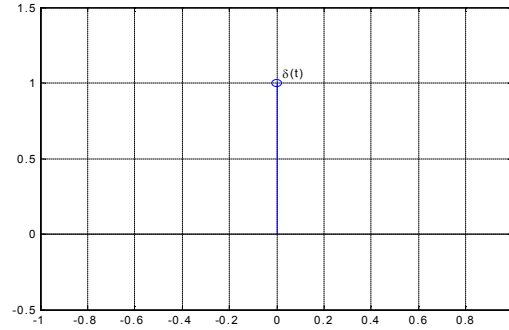


Fig.8: Función impulso unitario.

Nótese que al aplicar un desplazamiento de valor $t_o \in \mathbb{R}$ a la función impulso unitario se obtiene:

$$\delta(t - t_o) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq t_o \\ 1 & , \quad t = t_o \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt = 1$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de un impulso unitario desplazado:

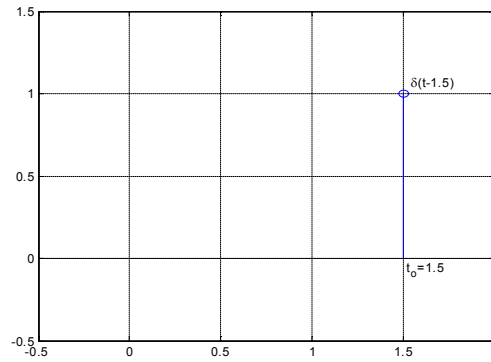


Fig.9: Función impulso unitario desplazado a $t=1.5$.

Otra definición matemática más formal del impulso unitario es:

$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & , \quad |t| \leq \epsilon \\ 0 & , \quad |t| > \epsilon \end{cases}$$

Propiedades del impulso unitario como operador.

La función impulso unitario no sólo trabaja como función, sino también como operador. En este caso, de la definición matemática del impulso unitario se desprenden las siguientes propiedades del $\delta(t)$:

1. Área bajo la curva: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.
2. Escalamiento en el tiempo: $\delta(kt) = \frac{1}{|k|} \delta(t) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.
3. Inversión en el tiempo: $\delta(-t) = \delta(t)$
4. Producto: $x(t) \delta(t - t_o) = x(t_o) \delta(t - t_o) \quad , \quad x(t) \text{ continua en } t = t_o \quad , \quad t_o \in \mathbb{R}$.

5. Filtrado: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt = x(t_o)$, $x(t)$ continua en $t = t_o$, $t_o \in \mathbb{R}$.

6. Integral con límites finitos:

$$\int_a^b x(t) \delta(t - t_o) dt = \begin{cases} x(t_o) & , a \leq t_o \leq b \\ 0 & , t_o < a \text{ ó } t_o > b \end{cases} , a, b, t_o \in \mathbb{R}.$$

7. Integral con integrando con derivadas del impulso unitario:

$$\int_a^b x(t) \delta^{(n)}(t - t_o) dt = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t_o) & , a \leq t_o \leq b \\ 0 & , t_o < a \text{ ó } t_o > b \end{cases} , a, b, t_o \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{N}.$$

8. Integral de convolución: $\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t)$, $x(\lambda)$ continua en $\lambda = t$.

Función escalón unitario.

Función escalón unitario o función de Heaviside, $u(t)$: es una función que tiene el valor 1 para todo $t \geq 0$, y que tiene el valor 0 para todo $t < 0$:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de un escalón unitario:

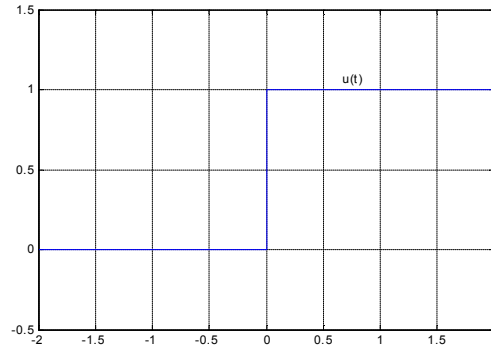


Fig.10: Función escalón unitario.

Nótese que al aplicar un desplazamiento de valor $t_o \in \mathbb{R}$ a la función escalón unitario se obtiene:

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0 & , t < t_o \\ 1 & , t \geq t_o \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de un escalón unitario desplazado:

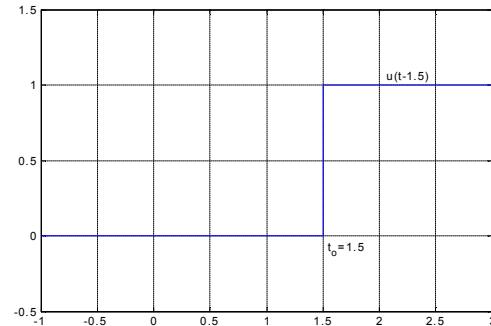


Fig.11: Función escalón unitario desplazado a t=1.5.

Función rampa unitaria.

Función rampa unitaria, $r(t)$: es una función que tiene el valor t para todo $t \geq 0$, y que tiene el valor 0 para todo $t < 0$:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de una rampa unitaria:

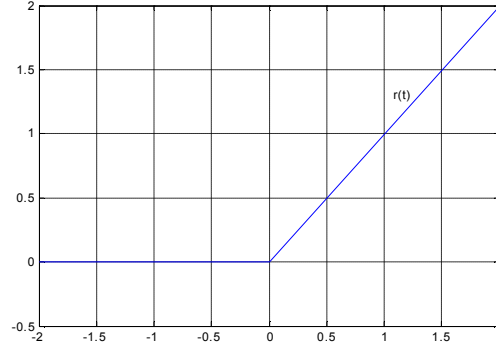


Fig12: Función rampa unitaria.

Nótese que al aplicar un desplazamiento de valor $t_o \in \mathbb{R}$ a la función rampa unitaria se obtiene:

$$r(t - t_o) = \begin{cases} 0 & , t < t_o \\ t - t_o & , t \geq t_o \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de una rampa unitaria desplazada:

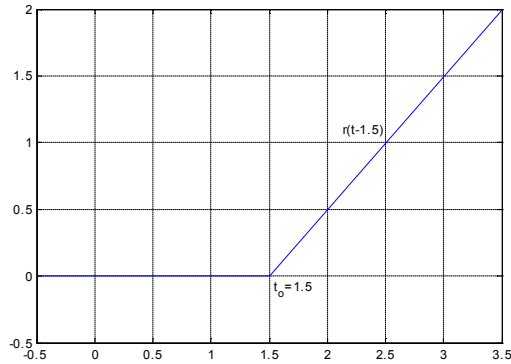


Fig13: Función rampa unitaria desplazada a $t=1.5$.

Relación entre las funciones singulares básicas.

Al calcular la integral de un escalón unitario $\int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda$ se tiene que, debido a la definición del escalón unitario,

$$\int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \int_{-\infty}^t 0 d\lambda & , t < 0 \\ \int_0^t 1 d\lambda & , t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases} = r(t). \text{ Esto es } r(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda.$$

Por una parte, al calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] dt$ se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] dt = x(t) u(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] dt$. Y debido a la definición del impulso unitario se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] dt = 1x(\infty) - \int_0^{\infty} 1 \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] dt$. Por lo que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] dt = x(\infty) - x(t) \Big|_0^{\infty} = x(0)$. Esto es $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] dt = x(0)$.

Por otra parte, la propiedad de filtrado del impulso unitario establece que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt = x(t_o)$. Por lo que

al tomar $t_o = 0$ se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0)$.

Finalmente, comparando estas dos expresiones obtenidas se concluye que la derivada del escalón unitario se comporta como un impulso unitario, es decir $\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$.

En conclusión, las funciones singulares $\delta(t)$, $u(t)$ y $r(t)$ tienen la siguiente relación de integración y derivación:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda \quad , \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \\ r(t) &= \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda \quad , \quad u(t) = \frac{d}{dt} r(t) \end{aligned}$$

Familia de funciones singulares.

La relación anterior lleva a generalizar las funciones singulares en lo que se llama *familia o clase de funciones singulares*, $u_i(t)$, $i = 0, -1, -2, \dots$, que establece que las diferentes funciones singulares se relacionan entre sí a través de la derivación y de la integración:

$$u_{i-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\lambda) d\lambda \quad , \quad i = 0, -1, -2, \dots \quad \text{y} \quad u_{i+1}(t) = \frac{d}{dt} u_i(t) \quad , \quad i = -1, -2, -3, \dots$$

De esta forma se tiene que:

$u_0(t) = \delta(t)$ (función central o base de la familia de funciones singulares: impulso unitario)

$u_{-1}(t) = u(t)$ (escalón unitario)

$u_{-2}(t) = r(t)$ (rampa unitaria)

$u_{-3}(t)$ (parábola unitaria)

Ejemplos: Graficar las siguientes señales expresadas como una suma de funciones singulares:

a) $x(t) = 2u(t-5) + u(t+5) - r(t) + 3u(t-2) + r(t-8)$.

b) $x(t) = -3r(t+6) + 2u(t+2) + 2r(t-2) + 5u(t-6)$.

c) $x(t) = -4u(t+3) + 2r(t-1) + u(t-5) - 3r(t-8) - 5u(t-10) + r(t-15)$.

Ejemplos: Expresar las siguientes señales como una suma de funciones singulares:

a) $x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 5 \\ 2 & , \quad t \geq 5 \end{cases}$.

b) $x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 2 \\ t & , \quad 2 \leq t \leq 5 \\ 5 & , \quad t \geq 5 \end{cases}$.

c) $x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ e^{-2t} & , \quad t \geq 0 \end{cases}$.

1.8 Operaciones sobre la variable tiempo de las señales

A manera de introducción, y debido a que ya son conocidas y a que tienen similitudes con las operaciones sobre la variable tiempo, se presentan las:

Operaciones sobre la amplitud o valor de una señal.

Dada una señal $x(t)$ se pueden realizar las siguientes operaciones sobre su valor:

- *Desplazamiento de la señal*, $x(t) + a$, $a \in \mathbb{R}$: esta operación desplaza la señal una cantidad a sobre el eje vertical.
- *Escalamiento de la señal*, $kx(t)$, $k > 0$: esta operación cambia el tamaño (valor) de la señal en un factor k .
- *Inversión de la señal*, $-x(t)$: esta operación refleja a la señal sobre el eje horizontal.
- *Combinaciones de las anteriores*: desplazamiento con escalamiento, desplazamiento con inversión, escalamiento con inversión, desplazamiento con escalamiento e inversión.

Ejemplo: Obtener diferentes operaciones sobre el valor de la señal $x(t) = \begin{cases} 0 & , t < 5 \\ 2 & , t \geq 5 \end{cases}$.

Operaciones sobre la variable tiempo de una señal.

Dada una señal $x(t)$ se pueden realizar las siguientes operaciones sobre su variable tiempo:

1. *Desplazamiento en el tiempo de la señal*, $x(t - t_o)$, $t_o \in \mathbb{R}$: esta operación desplaza la señal una cantidad t_o sobre el eje horizontal, de tal forma que si $t_o > 0$ la mueve a la derecha y si $t_o < 0$ la mueve a la izquierda.

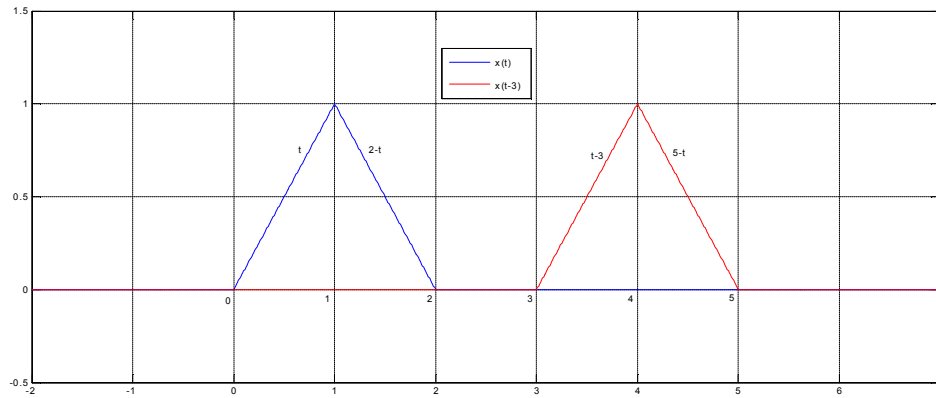


Fig.14: Desplazamiento en el tiempo de una señal.

2. *Escalamiento en el tiempo de la señal*, $x(kt)$, $k > 0$: esta operación cambia el tamaño en el tiempo de la señal en un factor $\frac{1}{k}$, de tal forma que si $k > 1$ la comprime en el tiempo y si $k < 1$ la expande en el tiempo.

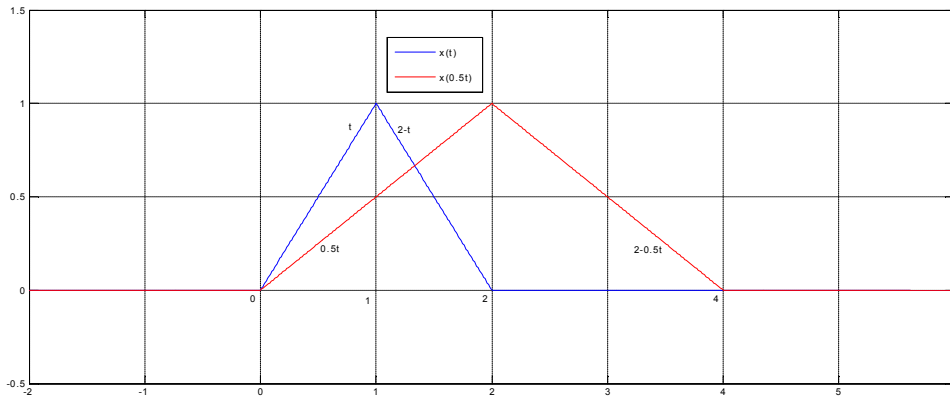


Fig.15: Escalamiento en el tiempo de una señal.

3. *Inversión en el tiempo de la señal, $x(-t)$* : esta operación refleja a la señal sobre el eje vertical, de tal forma que lo que estaba originalmente del lado derecho de la señal queda del lado izquierdo y viceversa.

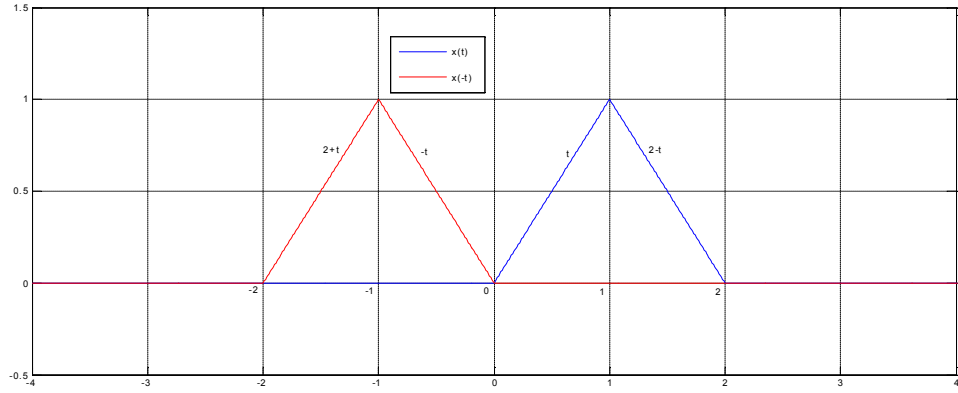


Fig.16: Inversión en el tiempo de una señal.

4. *Desplazamiento con escalamiento en el tiempo de la señal, $x(kt - t_o)$, $t_o \in \mathbb{R}$, $k > 0$* .

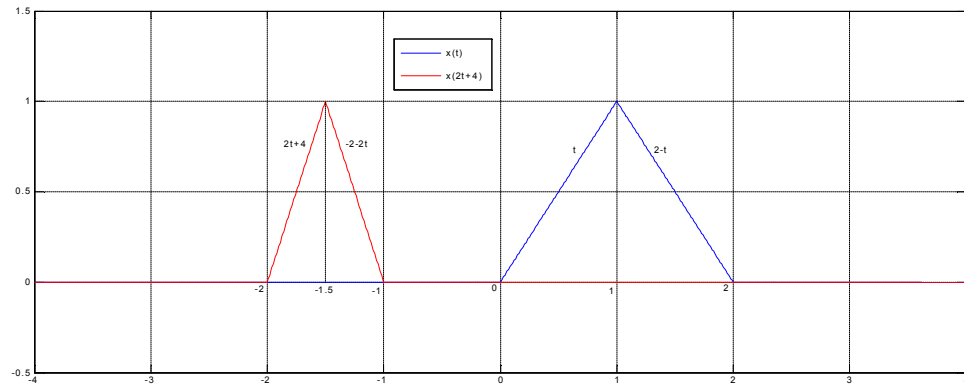


Fig.17: Desplazamiento con escalamiento en el tiempo de una señal.

5. *Desplazamiento con inversión en el tiempo de la señal, $x(-t - t_o)$, $t_o \in \mathbb{R}$* .

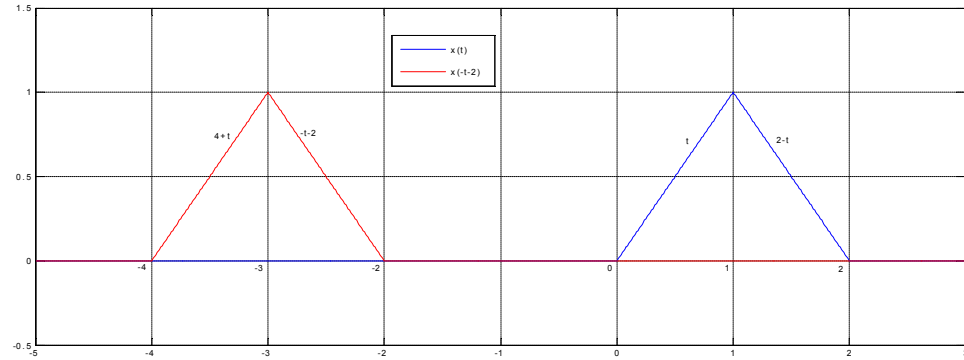


Fig.18: Desplazamiento con inversión en el tiempo de una señal.

6. Escalamiento con inversión en el tiempo de la señal, $x(-kt)$, $k > 0$.

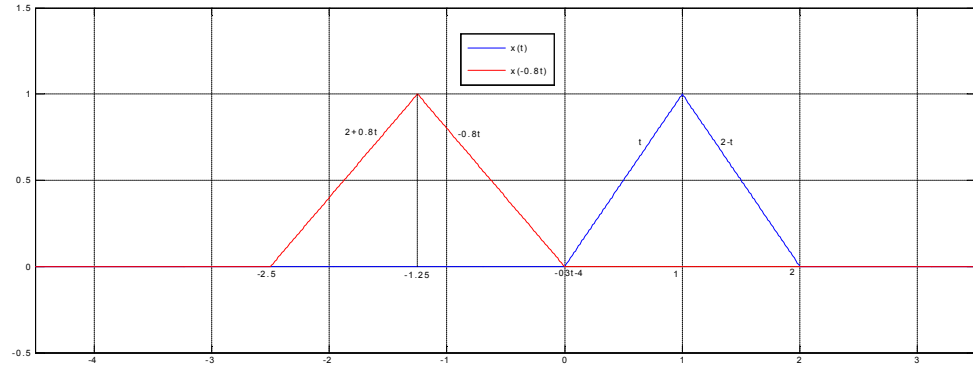


Fig.19: Escalamiento con inversión en el tiempo de una señal.

7. Desplazamiento con escalamiento e inversión en el tiempo de la señal, $x(-kt - t_o)$, $t_o \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

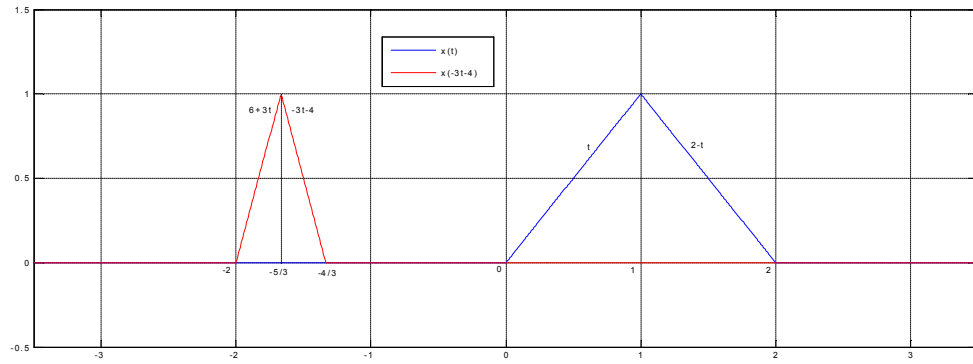


Fig.20: Desplazamiento con escalamiento e inversión en el tiempo de una señal.

Ejemplos: Obtener diferentes operaciones sobre la variable tiempo de las siguientes señales y expresar la nueva señal como una suma de funciones singulares:

a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ 2, & t \geq 5 \end{cases}$.

b) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t, & 2 \leq t \leq 5 \\ 5, & t \geq 5 \end{cases}$.

c) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases}$.

d) $x(t) = 2u(t-5) + u(t+5) - r(t) + 3u(t-2) + r(t-8)$.

e) $x(t) = -3r(t+6) + 2u(t+2) + 2r(t-2) + 5u(t-6)$.

f) $x(t) = -4u(t+3) + 2r(t-1) + u(t-5) - 3r(t-8) - 5u(t-10) + r(t-15)$.

g) $x(t) = 2u(-t-5) + 3u(t+2) - r(2t-1) - 2u(t-5) + r(t-8)$.

h) $x(t) = 3r(-t-6) + u(t+3) + 3r(t-5) - 3u(2t-6)$.

i) $x(t) = -4u(t+3) + r\left(\frac{1}{2}t-1\right) + 2u(t-5) - r(t-8) + 3u(t-10)$.

1.9 Convolución de señales

(Integral de) *Convolución de señales*: la convolución de dos señales continuas en el tiempo $x(t)$ y $y(t)$, si es que se puede obtener, es una operación que genera una nueva señal $z(t)$ de la siguiente manera:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) y(t - \lambda) d\lambda$$

Propiedades de la integral de convolución.

De la definición matemática de la integral de convolución se desprenden las siguientes propiedades de la convolución:

1. Conmutatividad: $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$.
2. Homogeneidad: $x(t) * [ay(t)] = [ax(t)] * y(t) = a[x(t) * y(t)]$, $a \in \mathbb{R}$.
3. Distributividad con respecto a la suma: $[x_1(t) + x_2(t)] * y(t) = [x_1(t) * y(t)] + [x_2(t) * y(t)]$.
4. Asociatividad: $x_1(t) * x_2(t) * y(t) = [x_1(t) * x_2(t)] * y(t) = x_1(t) * [x_2(t) * y(t)]$.
5. Acotamiento en el tiempo:
Si $x(t)$ está acotada en $t \in [a, b]$ y $y(t)$ está acotada en $t \in [c, d]$. Entonces $x(t) * y(t)$ está acotada en $t \in [a + c, b + d]$.
6. Área bajo la curva:
Si $x(t)$ tiene área A y $y(t)$ tiene área B . Entonces $x(t) * y(t)$ tiene área AB .

Ejemplos: Obtener la convolución de las siguientes señales:

- a) $x(t) = 5u(t)$, $y(t) = 2u(t - 4)$.
- b) $x(t) = 2u(t + 3)$, $y(t) = 2e^{-(t-5)}u(t - 5)$.
- c) $x(t) = e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 2u(t)$.
- d) $x(t) = 3u(t + 2) - 3u(t - 4)$, $y(t) = 2u(t - 1)$.
- e) $x(t) = u(t + 3) - u(t - 1)$, $y(t) = 4u(t - 4) - 4u(t - 6)$.
- f) $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2\pi}{5}\right)u(t)$, $y(t) = r(t - 4)$.

2 Análisis de sistemas continuos Lineales Invariantes en el Tiempo (LIVT) mediante Integral de Convolución (IC)

2.1 Sistemas

Sistema: es un conjunto de componentes y/o elementos que interactúan entre sí para lograr un objetivo o fin común (señal de salida) a partir de algunas condiciones de inicio dadas (señal de entrada).

Análisis de sistemas: consiste en determinar las características o propiedades que tiene un sistema, así como en obtener su salida a partir de una entrada dada.

Síntesis o diseño de sistemas: consiste en determinar los componentes y su interrelación que lograrán generar una salida deseada a partir de una entrada deseada.

Representación de un sistema.

Un sistema se puede representar de las siguientes maneras:

1. *Representación matemática:* se utiliza una función matemática, en una o más variables independientes (entrada del sistema), para describir el comportamiento (dinámica) de un sistema donde la(s) variable(s) dependiente(s) de la función es la salida del mismo. Ejemplo: $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ ($y(t)$ es la señal de salida del sistema, $x(t)$ es la señal de entrada del sistema, y $\mathbf{H}[\cdot]$ es la función de transformación del sistema).
2. *Representación gráfica:* se utiliza un bloque operativo para describir el comportamiento (dinámica) de un sistema (función de transformación) con varias flechas, unas de entrada y otras de salida.

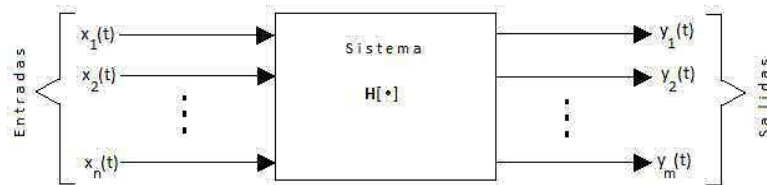


Fig.21: Representación gráfica de un sistema.

Interconexión de sistemas.

Los sistemas también se pueden conectar entre sí para construir un nuevo sistema, siendo posibles las siguientes interconexiones básicas entre dos sistemas:

1. *Interconexión en serie o en cascada:* en esta conexión la salida de un sistema se utiliza como la entrada del otro sistema.

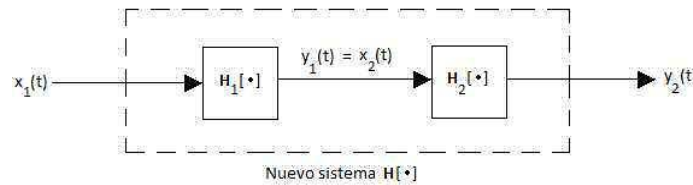


Fig.22: Sistemas en serie.

2. *Interconexión en paralelo:* en esta conexión ambos sistemas tienen la misma entrada, pero sus salidas se suman algebraicamente para generar la salida de la interconexión.

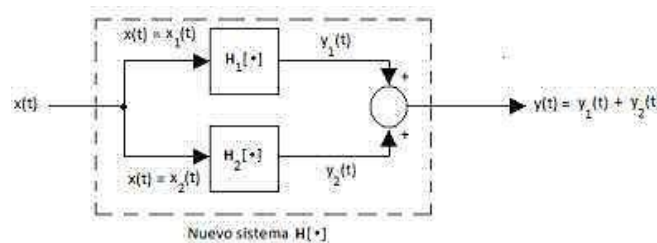


Fig.23: Sistemas en paralelo.

3. *Interconexión mixta o serie-paralelo*: es una combinación de las interconexiones serie y paralelo.

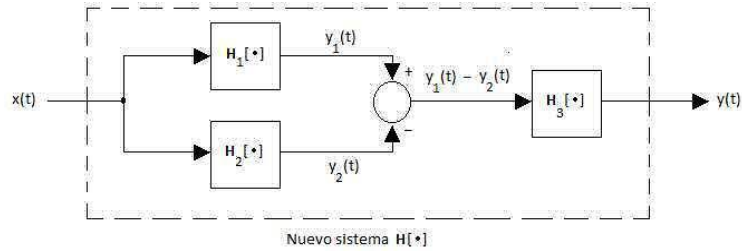


Fig.24: Sistemas en conexión mixta.

4. *Interconexión en retroalimentación*: en esta conexión la salida del sistema es "regresada" (retroalimentada) a su entrada a través de otro sistema.

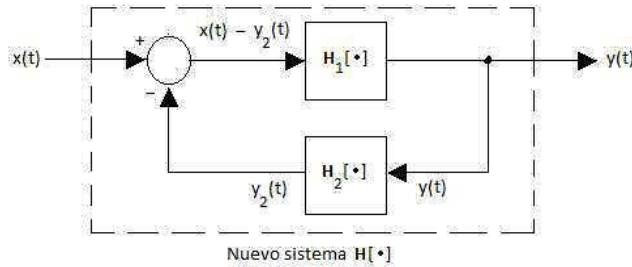


Fig.25: Sistemas en retroalimentación.

Ejemplo: Realizar diferentes interconexiones con los sistemas $y_1(t) = \mathbf{H}_1[x_1(t)] = 3x_1(t) + 2$, $y_2(t) = \mathbf{H}_2[x_2(t)] = x_2^2(t) + x_1(t)$ y $y_3(t) = \mathbf{H}_3[x_3(t)] = x_1(t)$.

Clasificación y propiedades de sistemas.

La clasificación de un sistema se realiza de acuerdo a si cumple o no cierta característica o propiedad. Un listado de los diferentes tipos de sistemas, así como de la propiedad correspondiente, es el siguiente:

1. De acuerdo a su *Naturaleza física*: como su nombre lo indica, depende del tipo de fenómeno en el que se define el sistema, por ejemplo:
 - *Sistemas eléctricos*: son los de fenómenos eléctricos. Ejemplos: circuito RC, circuito RLC, etc.
 - *Sistemas mecánicos*: son los de fenómenos mecánicos. Ejemplos: sistema masa-resorte-amortiguador, sistema de péndulo invertido, etc.
 - *Sistemas térmicos*: son los de fenómenos térmicos. Ejemplos: intercambiador de calor, horno, etc.
 - *Sistemas electrónicos*: son los de fenómenos electrónicos. Ejemplos: circuito impreso, circuito contador, etc.
2. De acuerdo a su *Número de entradas y salidas*: como su nombre lo indica, depende de cuántas entradas y salidas tiene la señal:
 - *Sistemas SISO (Single Input-Single Output)*: tienen una única entrada y una única salida. Este es el caso más sencillo, por lo que de aquí en adelante las definiciones y el análisis se acotarán a este caso. Ejemplo: circuito RC donde la entrada es el voltaje de la fuente y la salida es el voltaje en el capacitor).
 - *Sistemas MIMO (Multiple Input-Multiple Output)*: tienen dos o más entradas y/o dos o más salidas. Ejemplo: un automóvil.
3. De acuerdo a su *Tipo de respuesta*: depende de cómo se está generando la asignación de valores de la salida del sistema al darle valores a la entrada del mismo.

- *Sistemas determinísticos*: el valor de la salida en un instante de tiempo dado es asignado de forma única a partir de la entrada. Ejemplo: circuito RC.
 - *Sistemas estocásticos, probabilísticos o aleatorios*: el valor de la salida en un instante de tiempo dado es asignado en forma arbitraria a partir de la entrada. Ejemplo: bolsa de valores.
4. De acuerdo a su *Continuidad en el tiempo*: depende de si el sistema tiene un comportamiento continuo en el tiempo.
- *Sistemas continuos (en el tiempo)*: el sistema trabaja con señales de entrada y salida continuas en el tiempo. Ejemplo: circuito RC.
 - *Sistemas discretos (en el tiempo)*: el sistema trabaja con señales de entrada y salida discretas en el tiempo. Ejemplos: computadora, circuito digital.
5. De acuerdo a su *Invariancia en el tiempo*: depende de si la respuesta del sistema es independiente o no del instante de tiempo t en que se aplica la entrada. Esta propiedad también se puede conceptualizar como la independencia o invariancia temporal de los parámetros del sistema. (Esta propiedad se analizará con detalle al final de este listado).
- *Sistemas invariantes en el tiempo (IVT)*: la salida es independiente del instante de tiempo t en que se aplica la entrada.
 - *Sistemas variantes en el tiempo (VT)*: la salida depende del instante de tiempo t en que se aplica la entrada.
6. De acuerdo a su *Linealidad*: depende de si la salida del sistema es función lineal de la entrada, esto es si el sistema cumple el principio de superposición o linealidad. (Esta propiedad se analizará con detalle al final de este listado).
- *Sistemas lineales (L)*: la salida si es función lineal de la entrada (si se cumple el principio de superposición).
 - *Sistemas no lineales (NL)*: la salida no es función lineal de la entrada (no se cumple el principio de superposición).
7. De acuerdo a su *Causalidad*: depende de si la respuesta del sistema en un instante de tiempo t_o depende (es resultado o efecto) de la entrada en tiempos $t \leq t_o$, es decir si la entrada y la salida cumplen una relación causa-efecto en el tiempo. (Esta propiedad se analizará con detalle al final de este listado).
- *Sistemas causales, no anticipativos o predictivos*: la salida en un instante de tiempo t_o depende únicamente de valores de la entrada en instantes $t \leq t_o$ (la entrada y la salida si cumplen una relación causa-efecto en el tiempo).
 - *Sistemas no causales, anticipativos o no predictivos*: la salida en un instante de tiempo t_o depende de al menos un valor de la entrada en un instante $t > t_o$ (la entrada y la salida no cumplen una relación causa-efecto en el tiempo).
8. De acuerdo a su *Capacidad de memoria*: depende de si la respuesta del sistema en un instante t_o depende únicamente del valor de la entrada en ese mismo instante t_o , es decir si la salida es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada. (Esta propiedad se analizará con detalle al final de este listado).
- *Sistemas dinámicos o con memoria*: la salida en un instante t_o depende de al menos un valor de la entrada en un instante $t \neq t_o$ (la salida si es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada).
 - *Sistemas instantáneos o sin memoria o estático*: la salida en un instante t_o depende únicamente del valor de la entrada en ese mismo instante t_o (la salida no es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada).
9. De acuerdo a su *Invertibilidad*: depende de si es posible recuperar (determinar o conocer) la entrada a partir de una salida dada. Si esto es posible, el sistema que lo hace se llama sistema inverso del sistema original. Esta propiedad también se puede conceptualizar como la capacidad que tiene el sistema para producir diferentes salidas a diferentes entradas. (Esta propiedad se analizará con detalle al final de este listado).
- *Sistemas invertibles*: si es posible recuperar la entrada a partir de una salida dada.
 - *Sistemas no invertibles*: no es posible recuperar la entrada a partir de una salida dada.

10. De acuerdo a su *Estabilidad*: depende de si la salida del sistema no diverge cuando su entrada es "pequeña" (acotada). (esta propiedad se analizará con detalle en el tema 2.5).

- *Sistemas estables*: la salida no diverge para toda entrada acotada.
- *Sistemas no estables o inestables*: la salida si diverge para al menos una entrada acotada.

A continuación se detalla la forma para determinar las propiedades 5 a 10 de un sistema:

Condición para invariancia en el tiempo: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es IVT si y sólo si $y(t - \tau) = \mathbf{H}[x(t - \tau)]$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ y $\forall x(t)$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es VT.

Condición para linealidad (principio de superposición): El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es lineal si y sólo si se cumple $\mathbf{H}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\mathbf{H}[x_1(t)] + b\mathbf{H}[x_2(t)]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall x_1(t), x_2(t)$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es no lineal.

Condición para causalidad: Básicamente es la definición ya vista: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es causal si y sólo si $y(t_o)$ depende exclusivamente de valores $x(t)$ con $t \leq t_o$, $\forall t_o \in \mathbb{R}$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es no causal. Además de la condición anterior, se puede emplear la siguiente condición equivalente: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es causal si y sólo si $\forall x_1(t), x_2(t)$ tales que $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \leq t_o$ entonces se cumple $\mathbf{H}[x_1(t)] = \mathbf{H}[x_2(t)]$, $\forall t_o \in \mathbb{R}$.

Condición para capacidad de memoria: Básicamente es la definición ya vista: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es dinámico si y sólo si $y(t_o)$ depende de al menos un valor $x(t)$ con $t \neq t_o$, $\forall t_o \in \mathbb{R}$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es instantáneo.

Condición para invertibilidad: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es invertible si y sólo si $\forall x_1(t), x_2(t)$ tales que $x_1(t) \neq x_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ entonces se cumple $\mathbf{H}[x_1(t)] \neq \mathbf{H}[x_2(t)]$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es no invertible. Además de la condición anterior, se puede emplear la siguiente condición equivalente: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es invertible si y sólo si $\forall \mathbf{H}[x_1(t)], \mathbf{H}[x_2(t)]$ tales que $\mathbf{H}[x_1(t)] = \mathbf{H}[x_2(t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}$ entonces se cumple $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Condición para estabilidad: Básicamente es la definición ya vista: El sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es estable si y sólo si $\forall x(t)$ tal que $|x(t)| < \infty$ entonces se cumple $|y(t)| < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si esta condición no se cumple, entonces el sistema es inestable.

Ejemplos: Determinar las propiedades de los siguientes sistemas:

- $y(t) = \mathbf{H}[x(t)] = 5x(t) - 2x(t - 1) + 1$.
- $y(t) = \mathbf{H}[x(t)] = 5tx(t) - 2x(t + 1)$.
- $y(t) = \mathbf{H}[x(t)] = 5x(t) + 2t$.
- $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$.
- $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3ty(t) = \dot{x}(t) + 2x(t) + 1$.
- $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = (t + 1)\ddot{x}(t) + 2x(t)$.
- $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = \ddot{x}(t) + 2x(t)$.

De los ejemplos anteriores se pueden concluir los siguientes criterios por inspección para determinar algunas propiedades de los sistemas:

- Un sistema es IVT si y sólo si todos sus coeficientes (parámetros) son independientes del tiempo (constantes).
- Un sistema es lineal si y sólo si no tiene términos independientes a la entrada y a la salida. (También existen otras condiciones, además de ésta, que producen no linealidad).
- Un sistema es causal si y sólo si no tiene desplazamientos de la entrada a la izquierda o si la máxima derivada de la entrada es menor o igual a la máxima derivada de la salida.
- Un sistema es dinámico si y sólo si es una ecuación diferencial o si tiene al menos un desplazamiento de su entrada.

2.2 Modelado matemático de sistemas físicos

Modelado: es el procedimiento por el cual se obtiene la representación "ideal" o "abstracta" (modelo) de un objeto o fenómeno.

Modelado matemático de sistemas: es el procedimiento por el cual se obtiene la representación matemática de un sistema.

La función matemática del modelo matemático de un sistema depende de las propiedades que tenga éste, por ejemplo: un sistema IVT tendrá coeficientes constantes; un sistema VT tendrá al menos un coeficiente variante en el tiempo; un sistema lineal no tendrá términos independientes de la entrada y de la salida; un sistema no lineal tendrá al menos un término independiente de la entrada y de la salida; un sistema dinámico continuo será una ecuación diferencial ordinaria; un sistema dinámico discreto será una ecuación en diferencias; etc.

La mayoría de los sistemas físicos, y sobretodo los que se van a considerar en este curso debido a su importancia, son determinísticos, dinámicos, continuos, causales, lineales e invariantes en el tiempo (para abreviar se les llamarán sistemas LIVT). A esta clase de sistemas les corresponde un modelo matemático que toma la forma de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de orden n causal, lineal e invariante en el tiempo, que es:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t) \quad , \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad , \quad m \leq n$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema y $x(t)$ es la entrada, junto con sus derivadas correspondientes $y^{(i)}(t)$ y $x^{(i)}(t)$. Esta EDO es la primera representación matemática que se puede obtener de un sistema LIVT, pero no es la única.

Orden de un sistema: es la característica o propiedad de un sistema que indica el grado de complejidad del mismo. Matemáticamente corresponde al orden de la EDO del sistema, es decir a la máxima derivada de la salida en la EDO del sistema, por lo que se tienen sistemas de primer orden cuando $n = 1$, sistemas de segundo orden cuando $n = 2$, etc.

Clasificación del modelo matemático de un sistema.

El modelo matemático de un sistema se puede clasificar como:

1. *Modelo en el dominio del tiempo o temporal:* como su nombre lo dice va a ser una función en el tiempo. En el caso de sistemas LIVT se tienen por ejemplo: Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), Función de Respuesta al Impulso (FRI).
2. *Modelo en el dominio de la frecuencia o frecuencial:* como su nombre lo dice va a ser una función en la frecuencia. En el caso de sistemas LIVT se tienen por ejemplo: Función de Respuesta a la Frecuencia (FRF), Función de Transferencia (FT).

Una consideración importante cuando se modela un sistema es la condición de reposo inicial del mismo, que implica que todos los elementos del sistema que almacenan energía tengan una energía almacenada inicial de valor 0 y que, en la EDO de orden n correspondiente, la variable independiente y todas sus derivadas sean 0 antes del instante t_o en que comienza a trabajar el sistema.

Otro aspecto importante cuando se determina la solución de una EDO son las llamadas condiciones auxiliares o iniciales del sistema, no se confunda con la condición de reposo, que son los valores de la salida y sus derivadas en el instante t_o en que comienza a trabajar el sistema.

Además, es importante cuidar la consistencia dimensional (utilizar unidades de un mismo sistema de unidades, preferentemente usar las unidades del Sistema Internacional de Unidades) y la consistencia de magnitudes (utilizar los valores numéricos en el mismo rango de magnitud) de los parámetros de un sistema cuando se realiza el modelado del mismo.

Dado un sistema LIVT, se dice que el sistema es causal LIVT cuando la salida del sistema en reposo (con entrada cero y condiciones iniciales cero) es cero. Se dice que el sistema es incremental lineal cuando las condiciones iniciales del mismo no son cero, debido a que la salida del sistema será la suma de un componente debido a la entrada y otro componente debido a esas condiciones iniciales. Se dice que es lineal si las condiciones iniciales son cero.

Procedimiento para obtener la EDO de un sistema LIVT.

1. Determinar el diagrama físico del sistema.
2. Determinar la fórmula o ecuación básica de cada elemento físico del sistema y la de la relación o interconexión de los elementos en el sistema.
3. Obtener una sola ecuación que contenta únicamente las variables de la entrada y de la salida, partiendo de las ecuaciones anteriores.
4. Dar la forma de una EDO causal, lineal e invariante en el tiempo a la ecuación anterior.

Ejemplos: Obtener la EDO de los sistemas:

- Circuito RC serie con salida en el capacitor.
- Circuito CR serie con salida en el resistor.
- Circuito RLC serie con salida en el capacitor.
- Sistema masa-resorte-amortiguador.

2.3 Función de Respuesta al Impulso (FRI) de sistemas LIVT

Función de Respuesta al Impulso (FRI), $h(t)$: es un modelo matemático temporal de un sistema LIVT que describe el comportamiento (respuesta o salida) del sistema con condiciones iniciales cero a una entrada impulso unitario, esto es $h(t) = \mathbf{H}[\delta(t)]$.

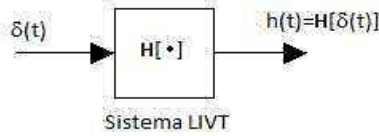


Fig.26: Conceptualización de la Función de Respuesta al Impulso.

Derivación matemática de la integral de convolución para sistemas LIVT y verificación de la definición de la FRI.

Sea un sistema LIVT $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con entrada $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$. Entonces la salida del sistema está dada por $y(t) = \mathbf{H}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda\right]$. Como el sistema es LIVT, entonces se puede escribir $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}[x(\lambda) \delta(t - \lambda)] d\lambda$. Debido a que el sistema es lineal se tiene $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \mathbf{H}[\delta(t - \lambda)] d\lambda$. Y como el sistema es invariante en el tiempo se obtiene $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$.

Con lo anterior se llega a la conclusión de que la salida de un sistema LIVT con FRI $h(t)$ a una entrada $x(t)$ es el resultado de la integral de convolución de la FRI con la entrada, esto es $y(t) = x(t) * h(t)$.

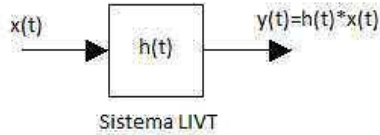


Fig.27: Respuesta de un sistema LIVT mediante Convolución.

Es importante mencionar que este resultado permite concluir que todos los sistemas que puedan representarse con una EDO LIVT también pueden representarse a través de la integral de convolución anterior. Sin embargo, no todos los sistemas que puedan representarse a través de una integral de convolución pueden representarse con una EDO LIVT, tal es el caso de un filtro ideal.

Además, dada la integral de convolución para la salida de un sistema LIVT, es posible verificar la definición de la FRI de la siguiente manera: si la entrada es $x(t) = \delta(t)$, entonces la salida se obtiene como $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$. Ahora, usando la propiedad de filtrado de la convolución se obtiene que $y(t) = h(t)$, es decir la FRI es la salida del sistema debida a una entrada impulso unitario.

Utilizando la FRI de un sistema LIVT también se pueden determinar algunas propiedades del sistema, como son:

- El sistema es causal si $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$.
- El sistema es instantáneo si $h(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$.
- El sistema es invertible si existe un sistema $h_1(t)$ tal que $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$. El sistema $h_1(t)$ se llama sistema inverso del sistema $h(t)$.

Obtención de la FRI usando el método de agregación de funciones singulares.

1. Obtener la EDO del sistema.
2. Obtener la Ecuación Diferencial No Homogénea (EDNH) del sistema mediante el cambio de variables $\delta(t) = x(t)$ y $h(t) = y(t)$ en la EDO.
3. Obtener la Ecuación Diferencial Homogénea (EDH) del sistema haciendo cero la entrada $\delta(t)$ y sus derivadas en la EDNH.
4. Obtener la solución $h_H(t)$ de la EDH del sistema mediante algún método conocido.
5. Determinar los parámetros indeterminados de $h_H(t)$ mediante su sustitución en la EDH.
6. Proponer la FRI (solución de la EDNH) como una agregación de funciones singulares: $h(t) = h_H(t)u(t) + k_1\delta(t) + k_2\dot{\delta}(t) + k_3\ddot{\delta}(t) + \dots$
7. Determinar los parámetros indeterminados de la FRI mediante su sustitución en la EDNH.

Ejemplos: Determinar la FRI de todos los sistemas que se vienen trabajando.

2.4 Respuesta de sistemas LIVT mediante Integral de Convolución

En el tema anterior se estableció que la salida de un sistema LIVT con FRI $h(t)$ a una entrada $x(t)$ es el resultado de la (integral de) convolución: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$. Ahora bien, se sabe que las condiciones iniciales (c.i.) también provocan una respuesta en un sistema LIVT, por lo que es necesario incluir esta situación en la obtención de la salida de un sistema LIVT.

Procedimiento para obtener la respuesta de un sistema LIVT con $h(t)$ a una entrada $x(t) \neq 0 \quad \forall t \geq t_o$ y con c.i. $\neq 0$ en $t = t_o$.

1. Considerar la entrada completa $x_c(t) = \begin{cases} x_d(t) & , \quad t < t_o \\ x(t) & , \quad t \geq t_o \end{cases}$, donde $x(t)$ es la entrada que se aplica al sistema en $t = t_o$ y $x_d(t)$ es la "entrada" desconocida que dió origen a las c.i. del sistema.

2. Entonces, la salida del sistema está dada por $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{t_o} x_d(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda + \int_{t_o}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$.

Si el sistema es causal, $y(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{t_o} x_d(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda + \int_{t_o}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$.

3. Como el sistema es LIVT se tiene que $h(t - \lambda) = h_1(t) h_2(\lambda)$, por lo que $y(t) = h_1(t) \int_{-\infty}^{t_o} x_d(\lambda) h_2(\lambda) d\lambda +$

$\int_{t_o}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$. Haciendo $k = \int_{-\infty}^{t_o} x_d(\lambda) h_2(\lambda) d\lambda$ se tiene $y(t) = k h_1(t) + \int_{t_o}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$ (esta es la ecuación de la salida completa del sistema).

4. Considerando el instante $t = t_o$ se tiene $y(t_o) = kh_1(t_o) + \int_{t_o}^{t_o} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = kh_1(t_o)$. Como las c.i. $y(t_o)$ del sistema son conocidas, entonces se puede obtener el valor de k de esta última ecuación.
5. Sustituyendo el valor de k en la ecuación de la salida completa del sistema del paso 3 y resolviendo el segundo término (integral de convolución de $h(t)$ con la entrada aplicada $x(t)$) se obtiene la salida deseada.

Además, observe que de acuerdo a las condiciones de trabajo del sistema se pueden dar varios casos de su salida:

- Si el sistema es causal, entonces $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$.
- Si el sistema es causal con c.i. = 0 y entrada $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$, entonces $y(t) = y_x(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_0^t h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$.
- Si el sistema es causal con c.i. $\neq 0$ en $t = t_o$ y entrada $x(t) = 0 \quad \forall t$, entonces $y(t) = y_s(t)$.

Descomposiciones posibles de la respuesta de un sistema LIVT.

Observe que la ecuación de la salida completa del sistema $y(t) = k h_1(t) + \int_{t_o}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$ implica que el primer término sólo depende de las c.i. del sistema y que el segundo término sólo depende de la entrada al sistema. Esto lleva a concluir que *la respuesta de un sistema se puede descomponer de acuerdo a quién genera la salida*, esto es se puede escribir como $y(t) = y_s(t) + y_x(t)$, donde $y_s(t) = k h_1(t)$ y se obtiene aplicando el procedimiento anterior,

y $y_x(t) = \int_{t_o}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$ y se obtiene resolviendo dicha integral de convolución.

Respuesta de entrada cero, $y_s(t)$: es la parte de la salida del sistema generada exclusivamente por el estado inicial (c.i.) existente en el sistema.

Respuesta de estado cero, $y_x(t)$: es la parte de la salida del sistema generada exclusivamente por la entrada aplicada al sistema.

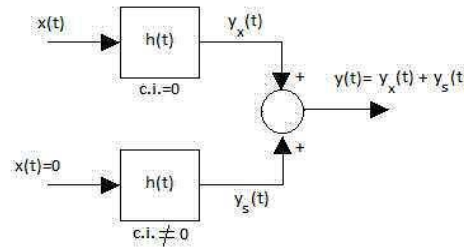


Fig.28: Respuesta de entrada cero y respuesta de estado cero de un sistema LIVT.

Por otra parte, *la respuesta de un sistema se puede descomponer de acuerdo a su permanencia en el tiempo*, esto es se puede escribir como $y(t) = y_{ts}(t) + y_{ss}(t)$, donde $y_{ts}(t)$ satisface la condición $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ts}(t) = 0$, y $y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Respuesta transitoria o de estado transitorio, $y_{ts}(t)$: es la parte de la salida del sistema que desaparece (se hace cero) cuando el tiempo se vuelve muy grande ($t \rightarrow \infty$).

Respuesta permanente o de estado estacionario, $y_{ss}(t)$: es la parte de la salida del sistema que permanece cuando el tiempo se vuelve muy grande ($t \rightarrow \infty$).

Respuesta de un sistema LIVT a entradas singulares.

Como ya se vió, si la entrada es un impulso unitario $\delta(t)$ la salida de un sistema LIVT es la FRI $h(t)$.

Ahora, considerando que la entrada es un escalón unitario $u(t)$ que genera una respuesta de un sistema LIVT llamada $s(t)$, se tiene que esta salida está dada por $s(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) u(t - \lambda) d\lambda$. Y

debido a la definición del escalón unitario se tiene que $s(t) = \int_{-\infty}^t 1 h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$.

Considerando, ahora que la entrada es una rampa unitaria $r(t)$ que genera una respuesta de un sistema LIVT llamada $q(t)$, se tiene que esta salida está dada por $q(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) r(t - \lambda) d\lambda$. Y debido

a la definición de la rampa unitaria se tiene que $q(t) = \int_{-\infty}^t (t - \lambda) h(\lambda) d\lambda$. Tomando esta ecuación, y calculando su

derivada se tiene que $\frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t (t - \lambda) h(\lambda) d\lambda$, y como el sistema es LIVT $\frac{d}{dt} q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} (t - \lambda) h(\lambda) d\lambda =$

$$\int_{-\infty}^t h(\lambda) \frac{d}{dt} (t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t 1 h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda = s(t).$$

En conclusión, las salidas de un sistema LIVT debidas a entradas singulares $h(t) = \mathbf{H}[\delta(t)]$, $s(t) = \mathbf{H}[u(t)]$ y $q(t) = \mathbf{H}[r(t)]$ tienen la misma relación de integración y derivación que las entradas (funciones) singulares:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda \quad , \quad h(t) = \frac{d}{dt} s(t) \\ q(t) &= \int_{-\infty}^t s(\lambda) d\lambda \quad , \quad s(t) = \frac{d}{dt} q(t) \end{aligned}$$

Ejemplos: Determinar la salida, y sus diferentes componentes vistos, de todos los sistemas que se vienen trabajando para las siguientes condiciones de operación:

- a) $x(t) = Au(t - t_o)$ con *c.i.* $\neq 0$ en $t = t_o$.
- b) $x(t) = u(t)$ con *c.i.* $\neq 0$ en $t = 0$.
- c) $x(t) = Au(t)$ con *c.i.* $= 0$ en $t = 0$.
- d) $x(t) = 0$ con *c.i.* $\neq 0$ en $t = 0$.
- e) $x(t) = r(t)$
- f) $x(t) = Ae^{-at}u(t)$, $a > 0$, con *c.i.* $= 0$ en $t = 0$.
- g) $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)u(t)$ con *c.i.* $= 0$ en $t = 0$.

$$\text{h) } x(t) = \begin{cases} A & , \quad 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A & , \quad \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases} \quad , \quad T_o > 0 \quad , \quad x(t + T_o) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{con } \textit{c.i.} = 0 \text{ en } t = 0.$$

2.5 Estabilidad Entrada Acotada-Salida Acotada (BIBO) de sistemas LIVT

Estabilidad BIBO (Bounded Input-Bounded Output, Entrada Acotada-Salida Acotada): un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada se tiene una salida también acotada.

Sea el sistema $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ y la entrada acotada $|x(t)| \leq A < \infty$. Entonces la salida del sistema está dada por $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$, por lo que $|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \right|$. Aplicando la desigualdad de

Cauchy-Schwarz se obtiene $\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda) x(t - \lambda)| d\lambda$. Que por propiedades del valor abso-

luto se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| x(t-\lambda) d\lambda \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t-\lambda)| d\lambda$. Utilizando la condición de entrada acotada se obtiene $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t-\lambda)| d\lambda \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda$. En conclusión, la cota de la salida del sistema a la entrada acotada es $|y(t)| \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda$, por lo que si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda < \infty$ entonces la salida será acotada (sistema BIBO estable) y, por otro lado, si la salida es acotada (sistema BIBO estable) entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda$ tiene que ser un valor finito.

Teorema: Un sistema LITV es BIBO estable si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.

Ejemplos: Determinar la estabilidad BIBO de todos los sistemas que se vienen trabajando.

2.6 Función de Respuesta a la Frecuencia (FRF) de sistemas LITV BIBO estables

Función de Respuesta a la Frecuencia (FRF), $H(j\omega)$: es un modelo matemático frecuencial de un sistema LITV BIBO estable que describe el comportamiento (respuesta o salida) del sistema con respecto a la frecuencia.

Derivación matemática de la FRF y respuesta de un sistema LITV a una entrada exponencial compleja.

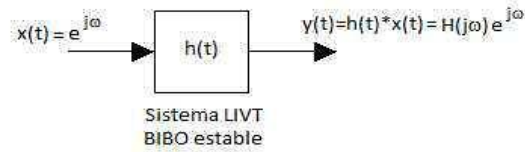


Fig.29: Conceptualización de la Función de Respuesta a la Frecuencia.

Para definir la FRF matemáticamente se considerará el sistema LITV BIBO estable $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ y la entrada $x(t) = e^{j\omega t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, como se muestra en la figura anterior. Entonces la salida del sistema está dada por $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\lambda)} h(\lambda) d\lambda$, por lo que $y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\lambda} h(\lambda) d\lambda$. Esto significa que si $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\lambda} h(\lambda) d\lambda$ es convergente, entonces existe la salida $y(t)$ a la entrada dada. Una condición suficiente para que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\lambda} h(\lambda) d\lambda$ sea convergente es que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ (sistema BIBO estable), pero la prueba se verá hasta la unidad IV. Además, con esta entrada exponencial compleja la salida que se obtiene es exclusivamente la parte llamada respuesta de estado estacionario.

FRF (definición matemática): $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} h(t) dt$ siempre y cuando el sistema sea BIBO estable.

Además, se puede concluir que la salida del sistema LITV BIBO estable $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ a la entrada $x(t) = e^{j\omega t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ es $y(t) = y_{ss}(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) = H(j\omega) x(t)$.

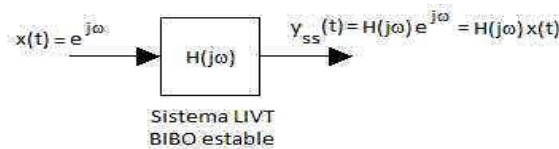


Fig.30: Respuesta de un sistema LITV BIBO estable a una entrada exponencial compleja.

Propiedades de la Función de Respuesta a la Frecuencia.

De la definición matemática de la FRF se desprenden las siguientes propiedades de la FRF:

1. Es una función compleja en la variable ω (frecuencia), por lo que $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$ y $H^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} h^*(t) dt$.
2. Si $h(t)$ es función real, entonces $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$, lo que implica que:
 - $\text{Re}\{H(j\omega)\} = \text{Re}\{H(-j\omega)\}$ (parte real de la FRF es par), $\text{Im}\{H(j\omega)\} = -\text{Im}\{H(-j\omega)\}$ (parte imaginaria de la FRF es impar).
 - $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$ (magnitud de la FRF es par), $\angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega)$ (fase de la FRF es impar).

Ejemplos: Determinar la FRF de todos los sistemas que se vienen trabajando.

2.7 Respuesta de sistemas LITV BIBO estables a entradas senoidales

Se considerará el sistema LITV BIBO estable $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con $h(t) \in \mathbb{R}$ y la entrada en forma estándar coseno $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, como se muestra en la figura siguiente:

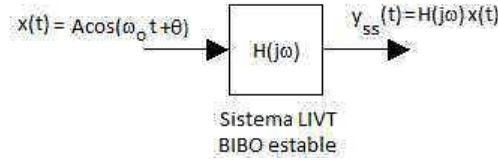


Fig.31: Respuesta de un sistema LITV BIBO estable a una entrada senoidal.

Entonces, para obtener la salida del sistema primero se utilizan las identidades de Euler para escribir la entrada como $x(t) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_o t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_o t + \theta)}$.

Ahora, aplicando la linealidad del sistema y lo visto en el tema anterior (salida del sistema a una entrada exponencial compleja) se tiene que la salida del sistema es $y_{ss}(t) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_o t + \theta)} H(j\omega_o) + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_o t + \theta)} H(-j\omega_o)$.

Lo que en forma polar es $y_{ss}(t) = \frac{A}{2} |H(j\omega_o)| e^{j[\omega_o t + \theta + \angle H(j\omega_o)]} + \frac{A}{2} |H(-j\omega_o)| e^{j[-\omega_o t - \theta + \angle H(-j\omega_o)]}$. Y, aplicando las propiedades de la FRF vistas en el tema anterior se obtiene $y_{ss}(t) = \frac{A}{2} |H(j\omega_o)| e^{j[\omega_o t + \theta + \angle H(j\omega_o)]} + \frac{A}{2} |H(j\omega_o)| e^{j[-\omega_o t - \theta - \angle H(j\omega_o)]}$. Por lo que $y_{ss}(t) = \frac{A}{2} |H(j\omega_o)| e^{j[\omega_o t + \theta + \angle H(j\omega_o)]} + \frac{A}{2} |H(j\omega_o)| e^{-j[\omega_o t + \theta + \angle H(j\omega_o)]}$.

Finalmente, aplicando las identidades de Euler, se obtiene que la salida del sistema a una entrada senoidal $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ es

$$y_{ss}(t) = A |H(j\omega_o)| \cos[\omega_o t + \theta + \angle H(j\omega_o)], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior lleva a la conclusión de que la salida de un sistema LITV BIBO estable a una entrada senoidal es también una senoidal de la misma frecuencia ω_o que la entrada pero con un escalamiento de amplitud en un factor $|H(j\omega_o)|$ y un defasamiento adicional de $\angle H(j\omega_o)$.

Además, lo aquí visto se puede generalizar a una entrada suma de senoidales: siendo la salida, por superposición, la suma de las salidas debidas a cada una de las senoidales componentes de la entrada.

Ejemplos: Determinar la salida de estado estacionario a la entrada senoidal $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ de todos los sistemas que se vienen trabajando.

3 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Series de Fourier (SF)

3.1 Series de Fourier

Sea una señal $x(t)$ periódica real, con periodo fundamental T_o , que satisface las siguientes condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es una señal absolutamente integrable en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o , es decir $\int_{T_o} |x(t)| dt < \infty$, o equivalentemente $x(t)$ tiene energía finita en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o , esto es $\int_{T_o} |x(t)|^2 dt < \infty$.
2. $x(t)$ es una señal de variación acotada en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o , es decir, $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o .
3. $x(t)$ es una señal continua por partes en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o , es decir $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo de tiempo de tamaño T_o .

Entonces la *Serie de Fourier Trigonométrica (SFT)* de $x(t)$ está dada por

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)] \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } a_o = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t) dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t) \cos(n\omega_o t) dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t) \sin(n\omega_o t) dt \quad \text{para } n > 0.$$

Además de la SFT, la serie de Fourier se puede escribir de las siguientes formas:

Serie de Fourier Armónica (SFA) o de magnitud-fase:

$$x(t) = d_o + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega_o t - \phi_n) \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } d_o = a_o \quad , \quad d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad \text{para } n > 0.$$

Serie de Fourier Exponencial Compleja (SFEC):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } c_o = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t) dt \quad , \quad c_n = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad \text{para } n \neq 0.$$

Como se puede observar, las series de Fourier son una forma para representar una señal periódica en términos de sus componentes armónicas, y los valores a_n , b_n , d_n , ϕ_n , c_n son llamados *coeficientes de Fourier*. Note, además, que a_n , b_n , d_n , $\phi_n \in \mathbb{R}$, mientras que $c_n \in \mathbb{C}$ por lo que se puede escribir como $c_n = |c_n| e^{j\angle c_n}$.

Cabe mencionar que es posible obtener las series de Fourier de una señal no periódica, siempre y cuando esta señal sea acotada en el tiempo, mediante la extensión periódica par o impar de esa señal (para más detalles de este método consultar un libro de series de Fourier, ya que no se contempla en este curso).

Señal o componente armónica de una señal $x(t)$ periódica: es una señal senoidal, que forma parte de la señal $x(t)$, cuya frecuencia es múltiplo entero de la frecuencia fundamental ω_o de $x(t)$.

Armónica constante o de cd: es la armónica con frecuencia igual al múltiplo cero de la frecuencia fundamental ω_o de $x(t)$. En el caso de las diferentes series de Fourier corresponde a $n = 0$, esto es son los términos a_o , d_o , c_o respectivamente.

Primer armónica o armónica fundamental: es la armónica con frecuencia igual a la frecuencia fundamental ω_o de $x(t)$. En el caso de las diferentes series de Fourier corresponde a $n = 1$, esto es son los términos $a_1 \cos(\omega_o t) + b_1 \sin(\omega_o t)$, $d_1 \cos(\omega_o t - \phi_1)$, $c_{-1} e^{-j\omega_o t} + c_1 e^{j\omega_o t}$ respectivamente.

Segunda armónica: es la armónica con frecuencia igual al doble de la frecuencia fundamental ω_o de $x(t)$. En el caso de las diferentes series de Fourier corresponde a $n = 2$, esto es son los términos $a_2 \cos(2\omega_o t) + b_2 \sin(2\omega_o t)$, $d_2 \cos(2\omega_o t - \phi_2)$, $c_{-2}e^{-j2\omega_o t} + c_2e^{j2\omega_o t}$ respectivamente.

Armónica de orden n o n -ésima armónica: es la armónica con frecuencia igual al múltiplo n de la frecuencia fundamental ω_o de $x(t)$. En el caso de las diferentes series de Fourier corresponde a los términos $a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)$, $d_n \cos(n\omega_o t - \phi_n)$, $c_{-n}e^{-jn\omega_o t} + c_n e^{jn\omega_o t}$ respectivamente.

Observe que en el caso de la SFEC, para las armónicas se considera tanto el caso de frecuencia positiva como el de negativa, esto es se considera múltiplo n y $-n$ de la frecuencia fundamental de la señal de interés.

Relación entre las diferentes formas de las series de Fourier.

1. SFT y SFA:

$$\begin{aligned} d_o &= a_o & a_o &= d_o \\ d_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n > 0 & a_n &= d_n \cos(\phi_n), \quad n > 0 \\ \phi_n &= \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right), \quad n > 0 & b_n &= d_n \sin(\phi_n), \quad n > 0 \end{aligned}$$

2. SFA y SFEC:

$$\begin{aligned} d_o &= c_o & c_o &= d_o \\ d_n &= 2|c_n|, \quad n > 0 & c_n &= \frac{d_n}{2}e^{-j\phi_n}, \quad n > 0 \\ \phi_n &= -\angle c_n, \quad n > 0 & c_{-n} &= \frac{d_n}{2}e^{j\phi_n}, \quad n > 0 \end{aligned}$$

3. SFT y SFEC:

$$\begin{aligned} c_o &= a_o & a_o &= c_o \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n > 0 & a_n &= c_n + c_{-n}, \quad n > 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n > 0 & b_n &= j(c_n - c_{-n}), \quad n > 0 \end{aligned}$$

4. SFT y SFEC si $x(t)$ es señal real:

$$\begin{aligned} c_o &= a_o & a_o &= c_o \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n > 0 & a_n &= 2\operatorname{Re}\{c_n\}, \quad n > 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n > 0 & b_n &= -2\operatorname{Im}\{c_n\}, \quad n > 0 \end{aligned}$$

Además, cabe resaltar las siguientes relaciones de magnitud y fase: $|c_n| = \frac{d_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$ y $\angle c_n = -\phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

Propiedades de las series de Fourier.

1. Si $x(t)$ es señal real, entonces $c_n^* = c_{-n}$, lo que implica que:

- $\operatorname{Re}\{c_n\} = \operatorname{Re}\{c_{-n}\}$ (parte real de los coeficientes de Fourier es par), $\operatorname{Im}\{c_n\} = -\operatorname{Im}\{c_{-n}\}$ (parte imaginaria de los coeficientes de Fourier es impar).
- $|c_n| = |c_{-n}|$ (magnitud de los coeficientes de Fourier es par), $\angle c_n = -\angle c_{-n}$ (fase de los coeficientes de Fourier es impar).

2. Si $x(t)$ es señal real y par, entonces $c_n \in \mathbb{R}$, lo que implica que:

$$b_n = 0, \quad d_n = |a_n|, \quad \phi_n = \begin{cases} 0 & , \quad a_n > 0 \\ \pi & , \quad a_n < 0 \end{cases}.$$

3. Si $x(t)$ es señal real e impar, entonces $c_n \in \mathfrak{F}$, lo que implica que:

$$a_n = 0, \quad d_n = |b_n|, \quad \phi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad b_n > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad b_n < 0 \end{cases}.$$

4. Si $x(t)$ es señal real y tiene simetría impar de media onda, entonces $c_n = a_n = b_n = d_n = 0$ para n par.

5. Si $x(t)$ tiene valor promedio cero, entonces $c_o = a_o = d_o = 0$.

6. Teorema de linealidad:

Sean $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$ y $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{jn\omega_o t}$. Entonces

$$ax(t) + by(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}, \quad c_n = ax_n + by_n, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

7. Teorema de traslación en el tiempo:

Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$. Entonces $x(t - t_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$, $c_n = x_n e^{-jn\omega_o t_o}$, $t_o \in \mathbb{R}$.

8. Teorema de escalamiento en el tiempo:

Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$. Entonces

$$x(kt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad c_n = x_n, \quad \omega_1 = k\omega_o, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

9. Teorema de inversión en el tiempo:

Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$. Entonces $x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$, $c_n = x_{-n}$.

10. Teorema del producto:

Sean $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$ y $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{jn\omega_o t}$. Entonces

$$x(t)y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}, \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}.$$

11. Teorema de conjugación:

Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t}$ señal compleja. Entonces $x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$, $c_n = x_{-n}^*$.

Ejemplos: Obtener las diferentes formas de las series de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b) $x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A, & \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) $x(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_o t), & 0 < t \leq \frac{T_o}{2} \\ 0, & \frac{T_o}{2} < t \leq T_o \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

d) $x(t) = |A \sin(\omega t)|$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

e) $x(t) = \begin{cases} t, & -\frac{T_o}{2} \leq t < 0 \\ -t, & 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

f) $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ 0, & \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$g) \quad x(t) = \begin{cases} A & , \quad -\frac{T_o}{4} \leq t < \frac{T_o}{4} \\ -A & , \quad \frac{T_o}{4} \leq t < \frac{3T_o}{4} \end{cases} \quad , \quad T_o > 0 \quad , \quad x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.2 Análisis espectral de señales periódicas mediante Series de Fourier

Procedimiento para obtener el análisis espectral de una señal real periódica mediante series de Fourier.

Primero hay que obtener la SFEC de la señal periódica real de interés, y una vez que se tenga se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la señal*: es el conjunto de las magnitudes de las armónicas de la SFEC de la señal. Esto es el conjunto de las magnitudes de los coeficientes de Fourier $\{|c_n|\}$ que se puede expresar como $M_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \delta(\omega - n\omega_o)$.
2. *Fase de la señal*: es el conjunto de las fases de las armónicas de la SFEC de la señal. Esto es el conjunto de las fases de los coeficientes de Fourier $\{\angle c_n\}$ que se puede expresar como $\theta_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \angle c_n \delta(\omega - n\omega_o)$.
3. *Frecuencia de la señal*: es el conjunto de las frecuencias de las armónicas de la SFEC de la señal. Esto es el conjunto $\{n\omega_o\}$.
4. *Espectro de magnitud de la señal*: es la gráfica del conjunto de magnitudes de la señal $\{|c_n|\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
5. *Espectro de fase de la señal*: es la gráfica del conjunto de fases $\{\angle c_n\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
6. *Función de densidad espectral de potencia de la señal*: es la función de magnitud de la señal M_x con las magnitudes $|c_n|$ al cuadrado. Esto es $S_x(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_o)$.
7. *Densidad espectral de potencia de la señal*: es la gráfica del conjunto del cuadrado de las magnitudes de la señal $\{|c_n|^2\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
8. *Potencia promedio de la señal*: se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de potencia, el cual es
$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_o^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad [W].$$
9. *Potencia de la señal en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$* : se puede obtener con la fórmula $P_{[a,b]} = \int_a^b S_x(j\omega) d\omega \quad [W].$

Nótese que como una señal periódica es una señal de potencia, sólo se obtienen parámetros de potencia no de energía. También obsérvese que los espectros de magnitud y de fase y la densidad espectral de potencia son gráficas discretas, ya que el conjunto de frecuencias de los armónicos es un conjunto discreto de valores. Además, se puede observar que, debido a que la señal es real, entonces el espectro de magnitud y la densidad espectral de potencia son gráficas con simetría par y el espectro de fase es una gráfica con simetría impar.

Ejemplos: Realizar el análisis espectral de todas las señales de los ejemplos del tema anterior.

3.3 Respuesta de sistemas LIT BIBO estables a entradas periódicas

Se considerará el sistema LIT BIBO estable $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con $h(t) \in \mathbb{R}$ y la entrada periódica real en forma SFEC $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, como se muestra en la figura siguiente:

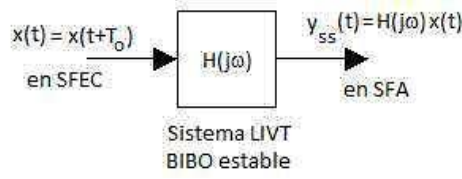


Fig.32: Respuesta de un sistema LIVT BIBO estable a una entrada periódica.

Entonces, aplicando la linealidad del sistema y lo visto en el tema 2.6 (salida del sistema a una entrada exponencial compleja) se tiene que la salida del sistema en forma SFEC es $y_{ss}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t}$. Lo que se puede

escribir como $y_{ss}(t) = c_o e^{j0} H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t}$, y cambiando los índices de la

segunda serie se tiene $y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} H(-jn\omega_o) e^{-jn\omega_o t}$.

Lo anterior en forma polar es

$$y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |H(jn\omega_o)| e^{j[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}| |H(-jn\omega_o)| e^{j[-n\omega_o t + \angle c_{-n} + \angle H(-jn\omega_o)]}.$$

Y, aplicando las propiedades de la FRF vistas en el tema 2.6 y las propiedades de las series de Fourier del tema anterior se obtiene $y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |H(jn\omega_o)| e^{j[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |H(jn\omega_o)| e^{j[-n\omega_o t - \angle c_n - \angle H(jn\omega_o)]}$.

Por lo que $y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |H(jn\omega_o)| e^{j[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |H(jn\omega_o)| e^{-j[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]}$.

Finalmente, aplicando las identidades de Euler, se obtiene que la salida en forma SFA del sistema a una entrada periódica es

$$y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |c_n| |H(jn\omega_o)| \cos[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)] \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior lleva a la conclusión de que la salida de un sistema LIVT BIBO estable a una entrada periódica es también una señal periódica de la misma frecuencia ω_o que la entrada.

Ejemplos: Determinar la salida de todos los sistemas que se vienen trabajando a las siguientes entradas:

a) $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

b) $x(t) = \begin{cases} A & , 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A & , \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases} \quad , T_o > 0 \quad , x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

c) $x(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_o t) & , 0 < t \leq \frac{T_o}{2} \\ 0 & , \frac{T_o}{2} < t \leq T_o \end{cases} \quad , T_o > 0 \quad , x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

d) $x(t) = |A \sin(\omega t)| \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

e) $x(t) = \begin{cases} t & , -\frac{T_o}{2} \leq t < 0 \\ -t & , 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \end{cases} \quad , T_o > 0 \quad , x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

f) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & , 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ 0 & , \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases} \quad , T_o > 0 \quad , x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

g) $x(t) = \begin{cases} A & , -\frac{T_o}{4} \leq t < \frac{T_o}{4} \\ -A & , \frac{T_o}{4} \leq t < \frac{3T_o}{4} \end{cases} \quad , T_o > 0 \quad , x(t + T_o) = x(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$

3.4 Análisis espectral de la respuesta de sistemas LIVT BIBO estables a entradas periódicas

Del tema anterior se sabe que la salida de un sistema LIVT BIBO estable en forma SFEC está dada por $y_{ss}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la forma general SFEC de la salida se puede escribir como $y_{ss}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{jn\omega_o t}$. Por lo tanto, los coeficientes de Fourier de la salida son $y_n = c_n H(jn\omega_o) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Por lo que se tiene:

$$|y_n| = |c_n H(jn\omega_o)| = |c_n| |H(jn\omega_o)| \quad , \quad \angle y_n = \angle c_n H(jn\omega_o) = \angle c_n + \angle H(jn\omega_o).$$

Procedimiento para obtener el análisis espectral de la respuesta de un sistema LIVT BIBO estable a una entrada señal real periódica mediante series de Fourier.

Conociendo la SFEC de la salida del sistema se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la salida:* es el conjunto de las magnitudes de las armónicas de la SFEC de la salida del sistema. Esto es el conjunto de las magnitudes de los coeficientes de Fourier $\{|y_n|\}$ que se puede expresar como $M_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n| \delta(\omega - n\omega_o)$.
2. *Fase de la salida:* es el conjunto de las fases de las armónicas de la SFEC de la salida del sistema. Esto es el conjunto de las fases de los coeficientes de Fourier $\{\angle y_n\}$ que se puede expresar como $\theta_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \angle y_n \delta(\omega - n\omega_o)$.
3. *Frecuencia de la salida:* es el conjunto de las frecuencias de las armónicas de la SFEC de la salida del sistema. Esto es el conjunto $\{n\omega_o\}$.
4. *Espectro de magnitud de la salida:* es la gráfica del conjunto de magnitudes de la salida del sistema $\{|y_n|\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
5. *Espectro de fase de la salida:* es la gráfica del conjunto de fases de la salida del sistema $\{\angle y_n\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
6. *Función de densidad espectral de potencia de la salida:* es la función de magnitud de la salida del sistema M_y con las magnitudes $|y_n|$ al cuadrado. Esto es $S_y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 \delta(\omega - n\omega_o)$.
7. *Densidad espectral de potencia de la salida:* es la gráfica del conjunto del cuadrado de las magnitudes de la salida del sistema $\{|y_n|^2\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
8. *Potencia promedio de la salida:* se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de potencia, el cual es
$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(j\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 = y_o^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \quad [W].$$
9. *Potencia de la salida en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$:* se puede obtener con la fórmula
$$P_{[a,b]} = \int_a^b S_y(j\omega) d\omega \quad [W].$$

Nótese que como la salida es una señal periódica es una señal de potencia, por lo que sólo se obtienen parámetros de potencia no de energía. También obsérvese que los espectros de magnitud y de fase y la densidad espectral de potencia son gráficas discretas, ya que el conjunto de frecuencias de los armónicos es un conjunto discreto de valores. Además, se puede observar que, debido a que la señal es real, entonces el espectro de magnitud y la densidad espectral de potencia son gráficas con simetría par y el espectro de fase es una gráfica con simetría impar.

Ejemplos: Realizar el análisis espectral de todas las salidas obtenidas en los ejemplos del tema anterior.

3.5 Distorsión armónica en sistemas LIVT

Distorsión armónica en sistemas LIVT: es el fenómeno en un sistema LIVT que consiste en que la salida no tiene los mismos componentes armónicos de la entrada con un escalamiento constante de amplitud y un defasamiento en el tiempo constante adicional.

La definición anterior implica que un *sistema LIVT sin distorsión* produce una salida que tiene los mismos componentes armónicos de la entrada con un escalamiento constante de amplitud y un defasamiento en el tiempo constante adicional, es decir que la salida es la entrada escalada en amplitud y con un desplazamiento en el tiempo.

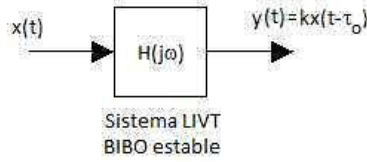


Fig.33: Sistema sin distorsión armónica.

Condiciones matemáticas para la distorsión armónica.

Por un lado considere un sistema LIVT BIBO estable $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con $h(t) \in \mathbb{R}$ y la entrada periódica real en forma SFA $x(t) = d_o + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega_o t - \phi_n)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, que en términos de los coeficientes c_n es igual

a $x(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_o t + \angle c_n)$. Entonces, se sabe que la salida del sistema en forma SFA está dada por $y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| |H(jn\omega_o)| \cos[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, si no hay distorsión en el sistema, entonces la salida a la entrada $x(t)$ debe ser $y_{ss}(t) = kx(t - \tau_o)$. Lo que implica que, tomando la forma SFA de la entrada, la salida sea $y_{ss}(t) = kc_o + \sum_{n=1}^{\infty} 2k|c_n| \cos[n\omega_o(t - \tau_o) + \angle c_n]$.

Entonces, la salida en forma SFA es $y_{ss}(t) = kc_o + \sum_{n=1}^{\infty} 2k|c_n| \cos[n\omega_o t - n\omega_o \tau_o + \angle c_n]$.

Ahora bien, comparando las dos ecuaciones de la salida obtenidas previamente se concluye que para que un sistema LIVT BIBO estable no tenga distorsión se deben cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} H(j0) = k \\ |H(jn\omega_o)| = k, n = 1, 2, \dots \\ \angle H(jn\omega_o) = -n\omega_o \tau_o, n = 1, 2, \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |H(jn\omega_o)| = k, n = 0, 1, 2, \dots \\ \angle H(jn\omega_o) = -n\omega_o \tau_o, n = 1, 2, \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = k, \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \angle H(j\omega) = -\tau_o \omega, \forall \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esto significa que si la magnitud de la FRF es constante para todo ω y la fase de la FRF es una función lineal (recta) de ω , entonces el sistema no distorsiona ninguna entrada. Estas condiciones se llaman condición de amplitud (o magnitud) y condición de ángulo (o fase), respectivamente, de la distorsión. Por lo tanto, cuando el sistema no cumple alguna de estas condiciones, o no cumple ambas condiciones, es cuando se presenta la distorsión armónica.

Distorsión de amplitud: este caso se presenta cuando el sistema no cumple la condición de amplitud de la distorsión, pero si cumple la condición de fase de la distorsión.

Distorsión de fase: este caso se presenta cuando el sistema no cumple la condición de fase de la distorsión, pero si cumple la condición de amplitud de la distorsión.

4 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Transformada de Fourier (TF)

4.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier se puede considerar como la generalización de las series de Fourier cuando ω_o tiende a un valor infinito, esto es cuando T_o tiende a cero.

Sea una señal $x(t)$ que satisface las siguientes condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es una señal absolutamente integrable, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, o equivalentemente $x(t)$ tiene energía

total finita, esto es $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.

2. $x(t)$ es una señal de variación acotada en cualquier intervalo finito de tiempo, es decir, $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito de tiempo.
3. $x(t)$ es una señal continua por partes en cualquier intervalo finito de tiempo, es decir $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito de tiempo.

Entonces la *Transformada (Directa) de Fourier (TF)* de $x(t)$ está dada por $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$,

donde la variable ω es la frecuencia.

Y la *Transformada Inversa de Fourier* está dada por $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

Además de estas definiciones, que son las que se van a usar en este curso, existen otras definiciones alternas en la literatura, como son:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{y} \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{usada también en ingeniería}$$

y por los físicos.

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{y} \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{usada más por los}$$

matemáticos debido a su forma simétrica.

Al observar las condiciones de existencia de la transformada de Fourier se aprecia que las señales de energía satisfacen la primera condición de Dirichlet, mientras que las señales de potencia no cumplen esta condición. Por ello, las señales de energía son el tipo de señales a las que se puede obtener su transformada (directa) de Fourier. Además, la transformada de Fourier (directa) es una función continua debido a que es obtenida mediante la integral de Fourier mostrada previamente. También se puede apreciar que la transformada de Fourier es una función de variable compleja, por lo que $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$.

Es importante recordar que la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier vienen dadas por pares, por lo que con esos pares se construyen las Tablas de Transformada de Fourier, cuyo uso es similar al de las tablas de transformada de Laplace y que es la forma en que se va a emplear en este curso.

Propiedades de la transformada de Fourier.

También es importante mencionar que la transformada de Fourier satisface las siguientes propiedades:

1. Si $x(t)$ es señal real, entonces $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$, lo que implica que:
 - $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\}$ (parte real de la TF es par), $\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\}$ (parte imaginaria de la TF es impar).
 - $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$ (magnitud de la TF es par), $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$ (fase de la TF es impar).

2. Si $x(t)$ es señal real y par, entonces $X(j\omega) \in \mathbb{R}$ y par.
3. Si $x(t)$ es señal real e impar, entonces $X(j\omega) \in \Im$ e impar.
4. Teorema de linealidad:
Sean $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ y $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\} = aX(j\omega) + bY(j\omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Teorema de traslación en el tiempo:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t - t_o)\} = e^{-jt_o\omega} X(j\omega)$, $t_o \in \mathbb{R}$.
6. Teorema de traslación en la frecuencia:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t} x(t)\} = X(j(\omega - \omega_o))$, $\omega_o \in \mathbb{R}$.
7. Teorema de escalamiento en el tiempo:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x(kt)\} = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{j\omega}{k}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.
8. Teorema de inversión en el tiempo:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega)$.
9. Teorema de derivación en el tiempo:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(j\omega)$.
10. Teorema de derivación en la frecuencia:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{t^n x(t)\} = j^n X^{(n)}(j\omega)$.
11. Teorema de integración en el tiempo:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$.
12. Teorema de modulación:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_o t) x(t)\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_o)) + X(j(\omega + \omega_o))] \quad , \quad \omega_o \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_o t) x(t)\} = \frac{1}{2j} [X(j(\omega - \omega_o)) - X(j(\omega + \omega_o))] \quad , \quad \omega_o \in \mathbb{R}.$$
13. Teorema de convolución en el tiempo:
Sean $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ y $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(j\omega) Y(j\omega)$.
14. Teorema de convolución en la frecuencia:
Sean $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ y $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t) y(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$.
15. Teorema de conjugación:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ con $x(t)$ señal compleja. Entonces $\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$.
16. Teorema de dualidad:
Sea $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-j\omega)$, o bien $\mathcal{F}\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)$.
17. Transformada de Fourier de señales periódicas:
Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (señal periódica). Entonces $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_o)$.

Ejemplos: Obtener la transformada de Fourier por medio de la integral de Fourier y por medio de las tablas de Fourier de las siguientes señales:

- a) $x(t) = u(t)$.
- b) $x(t) = Ae^{-at}u(t)$, $a > 0$.
- c) $x(t) = r(t)$.
- d) $x(t) = A \cos(\omega_o t) u(t)$, $\omega_o > 0$.
- e) $x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega_o t) u(t)$, $a > 0$.
- f) $x(t) = Ate^{-at}u(t)$, $a > 0$.
- g) $x(t) = \begin{cases} A & , 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A & , \frac{T_o}{2} \leq t \leq T_o \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos: Obtener la transformada inversa de Fourier de las siguientes expresiones:

- a) $X(j\omega) = \frac{5}{-3\omega^2 + 2j\omega + 4}$.
- b) $X(j\omega) = \frac{5}{-2\omega^2 + 5j\omega + 1}$.
- c) $X(j\omega) = \frac{5}{-\omega^2 + 2j\omega + 1}$.
- d) $X(j\omega) = \frac{5s + 1}{-3j\omega^3 - 5\omega^2 + 2j\omega}$.
- e) $X(j\omega) = \frac{5s^2}{(j\omega + 3)(-2\omega^2 + 3j\omega + 1)}$.
- f) $X(j\omega) = \frac{5s}{(j\omega + 2)(-\omega^2 + 3j\omega + 2)}$.

4.2 Transformada de Fourier Generalizada

Transformada de Fourier Generalizada (o indirecta): es un método que permite obtener la transformada de Fourier de señales que no cumplan la primera condición de Dirichlet (por lo que la integral de Fourier no converge), esto es de señales periódicas y de funciones singulares, que está basado en una relación básica y en el uso de las propiedades de la transformada de Fourier y de los pares de transformada de Fourier conocidos.

Transformada de Fourier de un impulso unitario.

Sea $x(t) = \delta(t)$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$, y usando la propiedad de filtrado del impulso unitario (tema 1.7) se obtiene $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-j\omega t}|_{t=0} = 1$. Por lo tanto:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (\text{Relación básica de la Transformada de Fourier Generalizada})$$

Para ejemplificar el uso de la transformada de Fourier Generalizada, se obtendrá la TF de las siguientes señales.

Transformada de Fourier de un escalón unitario.

Sea $x(t) = u(t)$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$, que tiene problemas de convergencia al resolverla directamente. Ahora bien, como $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$ se tiene que $\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(t) dt\right\}$, por lo que aplicando el teorema de integración en el tiempo de las propiedades de Fourier se obtiene $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(t) dt\right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$ con $X(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega).$$

Transformada de Fourier de una rampa unitaria.

Sea $x(t) = r(t)$. Entonces $\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j\omega t} dt$, que tiene problemas de convergencia al resolverla directamente. Ahora bien, como $r(t) = tu(t)$ se tiene que $\mathcal{F}\{r(t)\} = \mathcal{F}\{tu(t)\}$, por lo que aplicando el teorema de derivación en la frecuencia de las propiedades de Fourier se obtiene $\mathcal{F}\{tu(t)\} = jX'(j\omega)$ con $X(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$. Luego $\mathcal{F}\{tu(t)\} = j\left[-\frac{1}{j\omega^2} + \pi\delta'(\omega)\right]$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}\{r(t)\} = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}.$$

Transformada de Fourier de una señal real periódica.

Primero se debe expresar la señal real periódica real en forma SFEC, esto es $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}. \text{ Entonces } X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} e^{-j\omega t} \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j(\omega - n\omega_o)t} \right] dt.$$

Debido a la linealidad de la integración se obtiene $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_o)t} dt \right]$, donde las integrales tienen problemas de convergencia al resolverlas directamente.

$$\text{Entonces, para poder obtener la TF de la señal periódica se considera que } X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \right\},$$

que por linealidad de la TF se puede expresar como $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_o t}\}$. Ahora bien, para obtener

$\mathcal{F}\{e^{jn\omega_o t}\}$ primero se obtiene $\mathcal{F}\{\delta(t - t_o)\}$. Por el teorema de traslación en el tiempo de la TF se tiene que $\mathcal{F}\{\delta(t - t_o)\} = e^{-jt_o\omega} X(j\omega)$ con $X(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_o)\} = e^{-jt_o\omega}.$$

Como la TF deseada es de la función $e^{jn\omega_o t}$, entonces se aplica el teorema de dualidad de la TF a la relación anterior con $\omega_o = -t_o$ y $\omega = t$, obteniendo $\mathcal{F}\{e^{jn\omega_o t}\} = 2\pi\delta(-\omega + \omega_o)$. Ahora aplicando la definición del impulso unitario o la propiedad de inversión del impulso unitario se obtiene

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_o).$$

$$\text{Finalmente, utilizando esta última relación se obtiene que } X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_o t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [2\pi\delta(\omega - n\omega_o)].$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una señal real periódica es

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_o), \text{ donde } c_n \text{ son los coeficientes de Fourier de la SFEC de la señal de interés.}$$

Ejemplos: Obtener la transformada de Fourier por medio de la transformada de Fourier generalizada de las señales que causaron problemas en los ejemplos del tema anterior.

4.3 Análisis espectral de señales mediante Transformada de Fourier

Procedimiento para obtener el análisis espectral de una señal real de energía mediante transformada de Fourier.

Primero hay que obtener la TF de la señal de interés, y una vez que se tenga se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la señal*: es el valor de magnitud de la TF de la señal, es decir $|X(j\omega)|$.
2. *Fase de la señal*: es el valor de fase de la TF de la señal, es decir $\angle X(j\omega)$.

3. *Frecuencia de la señal*: es el valor de la frecuencia $\omega \in \mathbb{R}$.
4. *Espectro o gráfica de magnitud de la señal*: es la gráfica de la magnitud de la señal $|X(j\omega)|$ con respecto a la frecuencia ω .
5. *Espectro o gráfica de fase de la señal*: es la gráfica de la fase de la señal $\angle X(j\omega)$ con respecto a la frecuencia ω .
6. *Función de densidad espectral de energía de la señal*: es el valor de magnitud de la señal $|X(j\omega)|$ al cuadrado. Esto es $G_x(j\omega) = |X(j\omega)|^2$.
7. *Densidad espectral de energía de la señal*: es la gráfica de la magnitud de la señal al cuadrado $|X(j\omega)|^2$ con respecto a la frecuencia ω .
8. *Energía total de la señal*: se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de energía, el cual es $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad [J]$.
9. *Energía de la señal en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$* : se puede obtener con la fórmula $E_{[a,b]} = \int_a^b G_x(j\omega) d\omega \quad [J]$.

Nótese que como se tiene una señal de energía, entonces sólo se obtienen parámetros de energía no de potencia. También obsérvese que los espectros de magnitud y de fase y la densidad espectral de energía son gráficas continuas, ya que la transformada de Fourier de la señal es continua en la frecuencia. Además, se puede observar que, debido a que la señal es real, entonces el espectro de magnitud y la densidad espectral de potencia son gráficas con simetría par y el espectro de fase es una gráfica con simetría impar.

Procedimiento para obtener el análisis espectral de una señal real periódica mediante transformada de Fourier.

Del tema anterior se sabe que la transformada de Fourier de la señal de interés está dada por $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_o)$, donde c_n son los coeficientes de Fourier de la SFEC de la señal. Con ella se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la señal*: es el conjunto de las magnitudes de los términos de la TF de la señal. Esto es el conjunto de las magnitudes de los coeficientes de Fourier $\{|c_n|\}$ que se puede expresar como $|X(j\omega)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \delta(\omega - n\omega_o)$.
2. *Fase de la señal*: es el conjunto de las fases de los términos de la TF de la señal. Esto es el conjunto de las fases de los coeficientes de Fourier $\{\angle c_n\}$ que se puede expresar como $\angle X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \angle c_n \delta(\omega - n\omega_o)$.
3. *Frecuencia de la señal*: es el conjunto de las frecuencias de los términos de la TF de la señal. Esto es el conjunto $\{n\omega_o\}$.
4. *Espectro de magnitud de la señal*: es la gráfica del conjunto de magnitudes de la señal $\{|c_n|\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
5. *Espectro de fase de la señal*: es la gráfica del conjunto de fases de la señal $\{\angle c_n\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
6. *Función de densidad espectral de potencia de la señal*: es la función de magnitud de la señal $|X(j\omega)|$ con las magnitudes $|c_n|$ al cuadrado. Esto es $S_x(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_o)$.
7. *Densidad espectral de potencia de la señal*: es la gráfica del conjunto del cuadrado de las magnitudes de la señal $\{|c_n|^2\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.

8. *Potencia promedio de la señal*: se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de potencia, el cual es

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad [W].$$

9. *Potencia de la señal en un ancho de banda* $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$: se puede obtener con la fórmula $P_{[a,b]} = \int_a^b S_x(j\omega) d\omega$ [W].

Como se puede observar, el análisis espectral de una señal real periódica usando TF coincide con el análisis espectral de la misma mediante SFEC.

Ejemplos: Realizar el análisis espectral de todas las señales de los ejemplos del tema 4.1.

4.4 Respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Fourier

La siguiente figura muestra el principio para obtener la respuesta de un sistema LIVT usando la transformada de Fourier:

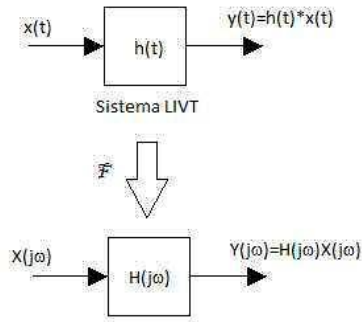


Fig.34: Respuesta de un sistema LIVT mediante Transformada de Fourier.

Procedimiento para obtener la respuesta de un sistema LIVT con $H(j\omega)$ a una entrada señal real de energía.

Se considerará un sistema LIVT $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con entrada $x(t)$ señal real de energía. Entonces, se sabe que la salida del sistema está dada por la convolución de la FRI y de la entrada, esto es $y(t) = h(t) * x(t)$. Luego, al aplicar la transformada de Fourier a esta ecuación se obtiene $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ (ecuación de la salida en Fourier), donde $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ y $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. Finalmente, si se conoce la ecuación de la salida en el dominio de Fourier $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$, sólo es necesario aplicarle la transformada inversa de Fourier para obtener la salida del sistema en el dominio del tiempo $y(t)$.

Además, observe que de la ecuación de la salida en Fourier se obtiene que $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$.

FRF (definición matemática alterna): la FRF es la transformada de Fourier de la FRI, esto es $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$ (que converge cuando se tiene un sistema BIBO estable, ya que esta condición coincide con la primera condición de Dirichlet).

FRF (otra definición matemática alterna): la FRF es la relación en el dominio de Fourier de la salida entre la entrada, esto es $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$.

Es importante mencionar que la FRF es independiente de la entrada y salida que se tengan, es decir que no cambia si la entrada y salida cambian.

Obtención directa de la FRF a partir de la EDO del sistema LIVT.

Como el sistema es LIVT, entonces se puede representar mediante una EDO LIVT, esto es $\sum_{i=0}^n [a_i y^{(i)}(t)] = \sum_{i=0}^m [b_i x^{(i)}(t)]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$. Entonces, al aplicar la transformada de Fourier a esta ecuación se obtiene

$$\sum_{i=0}^n \left[a_i (j\omega)^i Y(j\omega) \right] = \sum_{i=0}^m \left[b_i (j\omega)^i X(j\omega) \right], \text{ que se puede escribir como } \left[\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i \right] Y(j\omega) = \left[\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i \right] X(j\omega),$$

por lo que $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$.

Cabe mencionar que si se tiene la función de respuesta a frecuencia en su forma polinomial, entonces se puede aplicar el procedimiento inverso al anterior para obtener la EDO del sistema.

Otras propiedades de la Función de Respuesta a la Frecuencia.

Adicionalmente a las propiedades vistas en el tema 2.6, a partir de la forma matemática de la FRF, obtenida previamente, se desprenden las siguientes propiedades de la FT:

1. $H(j\omega)$ es una función compleja en la variable (frecuencia) ω .
2. $H(j\omega)$ es una función racional de polinomios, es de orden n y es propia ($m \leq n$).

Procedimiento para obtener la respuesta de un sistema LIVT con $H(j\omega)$ a una entrada señal real periódica.

Como ya se sabe, la ecuación de la salida en el dominio de Fourier de un sistema LIVT está dada por $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$. Debido a que la entrada es una señal real periódica, entonces su transformada de Fourier es $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_o)$, donde c_n son los coeficientes de Fourier de la SFEC de la señal. Luego, aplicando la linealidad

del sistema se tiene que la salida del sistema en Fourier es $Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n H(jn\omega_o) \delta(\omega - n\omega_o)$. Ahora bien, al aplicar la transformada inversa de Fourier a $Y(j\omega)$ se obtiene que la salida del sistema en forma SFEC es $y_{ss}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_o) e^{jn\omega_o t}$, que es la misma ecuación obtenida para la salida usando series de Fourier (tema 3.3), por lo

que en forma SFA la salida es $y_{ss}(t) = c_o H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| |H(jn\omega_o)| \cos[n\omega_o t + \angle c_n + \angle H(jn\omega_o)]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos: Determinar la salida, y sus diferentes componentes vistos, de todos los sistemas que se vienen trabajando para las siguientes condiciones de operación:

- a) $x(t) = u(t)$.
- b) $x(t) = Ae^{-at}u(t)$, $a > 0$.
- c) $x(t) = r(t)$.
- d) $x(t) = A \cos(\omega_o t)u(t)$, $\omega_o > 0$.
- e) $x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega_o t)u(t)$, $a > 0$.
- f) $x(t) = Ate^{-at}u(t)$, $a > 0$.

$$g) \ x(t) = \begin{cases} A & , \ 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A & , \ \frac{T_o}{2} \leq t \leq T_o \end{cases}, \ T_o > 0, \ x(t + T_o) = x(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4.5 Análisis espectral de la respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Fourier

Del tema anterior se sabe que la salida del sistema en el dominio de Fourier está dada por $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$. Por lo que se tiene:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega) X(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)|, \quad \angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) X(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega).$$

Procedimiento para obtener el análisis espectral de la respuesta de un sistema LIVT a una entrada señal real de energía mediante transformada de Fourier.

Conociendo la TF de la salida del sistema se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la salida*: es el valor de magnitud de la TF de la salida del sistema, es decir $|Y(j\omega)|$.
2. *Fase de la salida*: es el valor de fase de la TF de la salida del sistema, es decir $\angle Y(j\omega)$.
3. *Frecuencia de la salida*: es el valor de la frecuencia $\omega \in \mathbb{R}$.
4. *Espectro o gráfica de magnitud de la salida*: es la gráfica de la magnitud de la salida del sistema $|Y(j\omega)|$ con respecto a la frecuencia ω .
5. *Espectro o gráfica de fase de la salida*: es la gráfica de la fase de la salida del sistema $\angle Y(j\omega)$ con respecto a la frecuencia ω .
6. *Función de densidad espectral de energía de la salida*: es el valor de magnitud de la salida del sistema $|Y(j\omega)|$ al cuadrado. Esto es $G_y(j\omega) = |Y(j\omega)|^2$.
7. *Densidad espectral de energía de la salida*: es la gráfica de la magnitud de la salida del sistema al cuadrado $|Y(j\omega)|^2$ con respecto a la frecuencia ω .
8. *Energía total de la salida*: se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de energía, el cual es $E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \quad [J]$.

9. *Energía de la salida en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$* : se puede obtener con la fórmula $E_{[a,b]} = \int_a^b G_y(j\omega) d\omega \quad [J]$.

Nótese que como la entrada es una señal de energía, entonces la salida también es una señal de energía, por lo que sólo se obtienen parámetros de energía no de potencia. También obsérvese que los espectros de magnitud y de fase y la densidad espectral de potencia son gráficas continuas, ya que la transformada de Fourier de la salida es continua en la frecuencia. Además, se puede observar que, debido a que la salida es una señal real, entonces el espectro de magnitud y la densidad espectral de potencia son gráficas con simetría par y el espectro de fase es una gráfica con simetría impar.

Procedimiento para obtener el análisis espectral de la respuesta de un sistema LIVT a una entrada señal real periódica mediante transformada de Fourier.

Del tema anterior se sabe que la salida del sistema, en el dominio de Fourier, está dada por

$$Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n H(jn\omega_o) \delta(\omega - n\omega_o).$$

Por otro lado, la forma general de la TF de la salida se puede escribir como $Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi y_n \delta(\omega - n\omega_o)$. Por

lo tanto, los coeficientes de Fourier de la salida son $y_n = c_n H(jn\omega_o)$.

Por lo que se tiene:

$$|y_n| = |c_n H(jn\omega_o)| = |c_n| |H(jn\omega_o)| \quad , \quad \angle y_n = \angle c_n H(jn\omega_o) = \angle c_n + \angle H(jn\omega_o).$$

Conociendo la TF de la salida del sistema se realiza lo siguiente:

1. *Magnitud de la salida*: es el conjunto de los términos de la TF de la salida del sistema. Esto es el conjunto de las magnitudes de los coeficientes de Fourier $\{y_n\}$ que se puede expresar como $|Y(j\omega)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n| \delta(\omega - n\omega_o)$.
2. *Fase de la salida*: es el conjunto de las fases de los términos de la TF de la salida del sistema. Esto es el conjunto de las fases de los coeficientes de Fourier $\{\angle y_n\}$ que se puede expresar como $\angle Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \angle y_n \delta(\omega - n\omega_o)$.
3. *Frecuencia de la salida*: es el conjunto de las frecuencias de los términos de la TF de la salida del sistema. Esto es el conjunto $\{n\omega_o\}$.

4. *Espectro de magnitud de la salida*: es la gráfica del conjunto de magnitudes de la salida del sistema $\{|y_n|\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
5. *Espectro de fase de la salida*: es la gráfica del conjunto de fases de la salida del sistema $\{\angle y_n\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
6. *Función de densidad espectral de potencia de la salida*: es la función de magnitud de la salida del sistema $|Y(j\omega)|$ con las magnitudes $|y_n|$ al cuadrado. Esto es $S_y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 \delta(\omega - n\omega_o)$.
7. *Densidad espectral de potencia de la salida*: es la gráfica del conjunto del cuadrado de las magnitudes de la salida del sistema $\{|y_n|^2\}$ con respecto al conjunto de frecuencias $\{n\omega_o\}$.
8. *Potencia promedio de la salida*: se puede obtener utilizando el teorema de Parseval de potencia, el cual es
$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(j\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 = y_o^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \quad [W].$$
9. *Potencia de la salida en un ancho de banda $[a, b]$ $\frac{rad}{seg}$* : se puede obtener con la fórmula $P_{[a,b]} = \int_a^b S_y(j\omega) d\omega$ [W].

Como se puede observar, el análisis espectral de la salida del sistema a una entrada señal real periódica usando TF coincide con el análisis espectral de la misma mediante SFEC.

Ejemplos: Realizar el análisis espectral de todas las salidas obtenidas en los ejemplos del tema anterior.

5 Análisis de sistemas continuos LIVT mediante Transformada de Laplace (TL)

5.1 Transformada de Laplace

Sea una señal $x(t)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $x(t)$ es una señal continua por partes en cualquier intervalo finito de tiempo.
2. $x(t)$ es una señal de orden exponencial, es decir $\exists M > 0, T > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ tal que $|x(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t > T$.

Entonces la *Transformada de Laplace (TL)* de $x(t)$ está dada por $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$, donde la variable de Laplace s es una variable compleja de valor $s = \sigma + j\omega$. Note que si $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$, entonces $X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$.

Y la *Transformada Inversa de Laplace* está dada por

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-jT}^{\sigma-jT} X(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s) e^{st} ds.$$

Es importante recordar que la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace vienen dadas por pares, por lo que con esos pares y considerando generalmente que $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$ se construyen las Tablas de Transformada de Laplace, cuyo uso ya es conocido para obtener tanto la transformada de Laplace como la transformada inversa de Laplace y que es la forma en que se va a emplear en este curso.

Propiedades de la transformada de Laplace.

También es importante recordar que la transformada de Laplace satisface algunas propiedades, como son:

1. Teorema de linealidad:

Sean $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(s) + bY(s)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Teorema de traslación en el tiempo:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{x(t - t_o)\} = e^{-t_o s} X(s)$, $t_o \in \mathbb{R}$.

3. Teorema de traslación en la frecuencia:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{e^{at}x(t)\} = X(s - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

4. Teorema de escalamiento en el tiempo:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{x(kt)\} = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{s}{k}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

5. Teorema de inversión en el tiempo:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s)$.

6. Teorema de derivación en el tiempo:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}\dot{x}(0^-) - \dots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$.

7. Teorema de derivación en la frecuencia:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n X^{(n)}(s)$.

8. Teorema de integración en el tiempo:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right\} = \frac{1}{s} X(s)$.

9. Teorema de integración en la frecuencia:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty X(\lambda) d\lambda$.

10. Teorema de convolución en el tiempo:

Sean $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Entonces $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$.

11. Teorema del valor inicial:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$, $x(t)$ sin funciones singulares en $t = 0$. Entonces $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sX(s)\}$.

12. Teorema del valor final:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$, $x(t)$ sin funciones singulares en $t = 0$. Entonces $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sX(s)\}$.

13. Teorema de conjugación:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ con $x(t)$ señal compleja, entonces $\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s^*)$.

Si $x(t)$ es señal real, entonces $X(s) = X^*(s^*)$.

14. Transformada de Laplace de señales periódicas:

Sea $x(t) = x(t + T_o) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (señal periódica). Entonces $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-T_o s}} \int_{T_o}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$.

Ejemplos: Obtener la transformada de Laplace por medio de las tablas de Laplace de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(t)$.

b) $x(t) = Ae^{-at}u(t)$, $a > 0$.

c) $x(t) = r(t)$.

d) $x(t) = A \cos(\omega_o t) u(t)$, $\omega_o > 0$.

e) $x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega_o t) u(t)$, $a > 0$.

f) $x(t) = Ate^{-at}u(t)$, $a > 0$.

g) $x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A, & \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases}$, $T_o > 0$, $x(t + T_o) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos: Obtener la transformada inversa de Laplace de las siguientes expresiones:

a) $X(s) = \frac{5}{3s^2 + 2s + 4}$.

b) $X(s) = \frac{5}{2s^2 + 5s + 1}$.

c) $X(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}$.

d) $X(s) = \frac{5s^2}{3s^3 + 5s^2 + 2s}$.

e) $X(s) = \frac{5s^2}{(s+3)(2s^2 + 3s + 1)}$.

f) $X(s) = \frac{5s}{(s+2)(s^2 + 3s + 2)}$.

g) $X(s) = \frac{5}{s^3 + 3s^2 + 4s}$.

5.2 Función de Transferencia (FT) de sistemas LIVT

Función de Transferencia (FT), $H(s)$: es un modelo matemático frecuencial, en el dominio de Laplace, de un sistema LIVT que describe el comportamiento (respuesta o salida) del sistema con respecto a la entrada.

Derivación matemática de la función de transferencia y de la respuesta de un sistema LIVT usando TL.

La siguiente figura muestra el principio para obtener la respuesta de un sistema LIVT usando la transformada de Laplace:

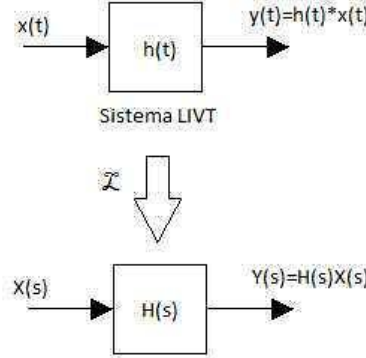


Fig.35: Respuesta de un sistema LIVT mediante Transformada de Laplace.

Para definir matemáticamente la FT se considerará un sistema LIVT $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ con entrada $x(t)$ y con c.i. cero. Entonces, se sabe que la salida del sistema está dada por la convolución de la FRI y de la entrada, esto es $y(t) = h(t) * x(t)$. Luego, al aplicar la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene $Y(s) = H(s)X(s)$ (ecuación de la salida en Laplace), donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Además, de la ecuación de la salida en Laplace se obtiene que $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

FT (definición matemática): la FT es la transformada de Laplace de la FRI, esto es $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$.

FT (definición matemática alterna): la FT es la relación en el dominio de Laplace de la salida entre la entrada con c.i. cero, esto es $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

Es importante mencionar que la FT es independiente de la entrada y salida que se tengan, es decir que no cambia si la entrada y salida cambian.

Relación entre los diferentes modelos matemáticos de un sistema LIVT.

Al comparar la TL de la FR, que es $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$, con la TF de la FRI, que es $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$, se concluye que ambas transformadas están relacionadas por el cambio de variable $s = j\omega$.

La siguiente figura muestra la relación existente entre los diferentes modelos matemáticos de un sistema LIVT vistos en el curso:

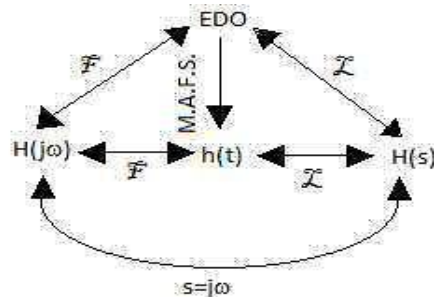


Fig.36: Relación entre los modelos matemáticos de un sistema LIVT.

Obtención directa de la FT a partir de la EDO del sistema LIVT.

Por otro lado, dado que el sistema es LIVT, se tiene que el sistema se puede representar mediante una EDO LIVT, esto es $\sum_{i=0}^n [a_i y^{(i)}(t)] = \sum_{i=0}^m [b_i x^{(i)}(t)]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$. Entonces, al aplicar la transformada de Laplace con

c.i. cero a esta ecuación se obtiene $\sum_{i=0}^n [a_i s^i Y(s)] = \sum_{i=0}^m [b_i s^i X(s)]$, que se puede escribir como $\left[\sum_{i=0}^n a_i s^i \right] Y(s) = \left[\sum_{i=0}^m b_i s^i \right] X(s)$, por lo que $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$.

Cabe mencionar que si se tiene la función de transferencia en su forma polinomial, entonces se puede aplicar el procedimiento inverso al anterior para obtener la EDO del sistema.

Propiedades de la Función de Transferencia.

De la forma matemática de la función de transferencia, obtenida previamente, se desprenden las siguientes propiedades de la FT:

1. $H(s)$ es una función compleja en la variable (de Laplace) s .
2. $H(s)$ es una función racional de polinomios, es de orden n y es propia ($m \leq n$).

Además, por ser una función racional compleja se tienen los siguientes elementos asociados a la función de transferencia:

Ceros de la FT o del sistema: son los valores de s tales que hacen cero a la FT, esto es hacen $H(s) = 0$. Por lo tanto, son las raíces del polinomio del numerador de la FT.

Polos de la FT o del sistema: son los valores de s tales que hacen infinito a la FT, esto es hacen $H(s) = \infty$. Por lo tanto, son las raíces del polinomio del denominador de la FT.

Polinomio característico de la FT o del sistema, $p(s)$: es el polinomio del denominador de la FT y describe las principales características del sistema.

Ecuación característica de la FT o del sistema: es el polinomio característico de la FT igualado a cero, esto es $p(s) = 0$.

Ejemplos: Determinar la FT de todos los sistemas que se vienen trabajando.

5.3 Respuesta de sistemas LIVT mediante Transformada de Laplace

Como se vio en el tema anterior, la salida, en el dominio de Laplace, de un sistema LIVT a una entrada dada (con c.i. cero) está dada por $Y(s) = H(s)X(s)$, por lo que si esta expresión se conoce sólo es necesario aplicarle la transformada inversa de Laplace para obtener la salida en el dominio del tiempo. Sin embargo, esta expresión no contempla el efecto de las c.i. de la salida, por lo que es necesario incluirlas en los cálculos.

Procedimiento para obtener la respuesta de un sistema LIVT con $H(s)$ a una entrada $x(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0$ y con c.i. $\neq 0$ en $t = 0$.

1. Determinar la EDO del sistema: $\sum_{i=0}^n [a_i y^{(i)}(t)] = \sum_{i=0}^m [b_i x^{(i)}(t)]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$.

2. Aplicando la TL con c.i. diferentes de cero a la EDO se obtiene:

$$\sum_{i=0}^n \{a_i [s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - s^{i-2} \dot{y}(0^-) - \dots - s y^{(i-2)}(0^-) - y^{(i-1)}(0^-)]\} = \sum_{i=0}^m [b_i s^i X(s)].$$

Note que para la entrada las c.i. son cero.

3. Despejando la salida se obtiene: $Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$. Donde c_i son los coeficientes, ya agrupados, para s^i y que provienen de las c.i. del sistema.

4. Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación $Y(s)$ para obtener la salida del sistema en el dominio del tiempo $y(t)$.

Descomposiciones posibles de la respuesta de un sistema LIVT en Laplace.

Observe que la ecuación de la salida en el dominio de Laplace obtenida, $Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$, se puede

escribir como $Y(s) = H(s)X(s) + Q(s)$, donde el primer término sólo depende del valor de la entrada, y el segundo término sólo depende de las c.i. del sistema. Esto significa que, en el dominio de Laplace, se tiene la descomposición de la salida $Y(s) = Y_x(s) + Y_s(s)$, donde $Y_x(s)$ es la respuesta de estado cero del sistema en el dominio de Laplace, y $Y_s(s)$ es la respuesta de entrada cero del sistema en el dominio de Laplace. Esta descomposición es la misma que se vió en el tema 2.4, sólo que en el dominio de Laplace. Por lo anterior, al aplicar la transformada de Laplace inversa a estos componentes se obtiene su valor en el dominio del tiempo. La siguiente figura muestra estos valores:

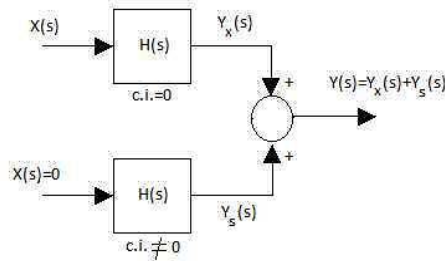


Fig.37: Respuesta de estado cero y respuesta de entrada cero en Laplace.

Por otro lado, conociendo la salida del sistema $y(t)$ se pueden obtener la respuesta transitoria del sistema $y_{ts}(t)$ y su respuesta de estado estacionario $y_{ss}(t)$, de acuerdo a las definiciones vistas en el tema 2.4.

Además, observe que es posible obtener la respuesta de estado estacionario del sistema directamente en Laplace aplicando el teorema del valor final a $Y(s)$: $y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$.

Ejemplos: Determinar la salida, y sus diferentes componentes vistos, de todos los sistemas que se vienen trabajando para las siguientes condiciones de operación:

- $x(t) = u(t)$ con c.i. $\neq 0$ en $t = 0$.
- $x(t) = Au(t)$ con c.i. $= 0$ en $t = 0$.
- $x(t) = 0$ con c.i. $\neq 0$ en $t = 0$.
- $x(t) = r(t)$.
- $x(t) = Ae^{-at}u(t)$, $a > 0$, con c.i. $= 0$ en $t = 0$.
- $x(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)u(t)$ con c.i. $= 0$ en $t = 0$.

$$g) \ x(t) = \begin{cases} A & , \ 0 \leq t < \frac{T_o}{2} \\ -A & , \ \frac{T_o}{2} \leq t < T_o \end{cases} \quad , \ T_o > 0 \quad , \ x(t + T_o) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{con c.i.} = 0 \text{ en } t = 0.$$

5.4 Estabilidad absoluta de sistemas LIVT

Estado de equilibrio de un sistema: es la condición o valor (estado) en que se mantiene o permanece la salida de un sistema en ausencia de entradas externas y sin c.i.

Estabilidad absoluta de un sistema: es la propiedad o capacidad que tiene el sistema de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Un sistema es *inestable (no estable) absoluto* cuando no tiene la capacidad de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Como consecuencia de la definición de la estabilidad absoluta se tiene que un sistema estable absoluto tiene la característica de que su respuesta transitoria, cuando sólo existen c.i. sin entradas externas, se hace cero cuando el tiempo tiende a infinito.

En el caso general, un sistema que sea BIBO estable no necesariamente es estable absoluto, aunque un sistema estable absoluto si es BIBO estable. Sin embargo, en el caso de sistemas LITV la estabilidad BIBO y la estabilidad absoluta si son equivalentes, es decir un sistema LITV BIBO estable es estable absoluto y viceversa.

Teorema: Un sistema LITV es estable absoluto si y sólo si todos sus polos tienen parte real estrictamente negativa, esto es si todos sus polos se ubican en el semiplano izquierdo complejo abierto. Matemáticamente, esta condición es:

$$\text{sistema estable absoluto ssi } \operatorname{Re}\{\text{todos los polos}\} < 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \operatorname{Re}\{\text{todos los polos}\} \in \mathbb{C}^{-}$$

La prueba de este teorema no se verá debido a que requiere conocimientos avanzados específicos de funciones de variable compleja.

Ejemplos: Determinar la estabilidad absoluta de todos los sistemas que se vienen trabajando.

Referencias

1. Haykin, S.; Van Veen, B. Señales y sistemas. México: Limusa, 2003.
2. Hsu, H.P. Análisis de Fourier. México: Prentice Hall.
3. Kamen, E.W.; Heck, B.S. Fundamentos de señales y sistemas, 3a ed. México: Prentice Hall, 2008.
4. Lindner, D.K. Introducción a las señales y los sistemas. Colombia: McGraw Hill, 2002.
5. Oppenheim, A.V.; Willsky, A.S.; Nawab, S.H. Señales y sistemas, 2^a ed. México: Prentice Hall, 1998.
6. Roberts, M.J. Señales y sistemas. México: McGraw Hill, 2004.
7. Ziemer, R.E.; Tranter, W.H.; Fannin D.R. Signals and Systems: Continuous and Discrete. Estados Unidos: Macmillan Publishing Company, 1993.